Devoir Maison n°9

Solution

Exercice 1. (Évolution du cours d'un titre)

(1) On utilise pour cette question la *formule des probabilités totales*. En effet, étant clair que, pour chaque valeur $n \geq 1$, $\{M_n, S_n, B_n\}$ forme un système complet d'évènements, on peut écrire

$$P(M_{n+1}) = P_{M_n}(M_{n+1})P(M_n) + P_{S_n}(M_{n+1})P(S_n) + P_{B_n}(M_{n+1})P(M_n).$$

Chacune des probabilités conditionnelles ci-dessus est donnée par le texte. Il suit que

$$(\star) \qquad m_{n+1} = (1-2a)m_n + as_n + ab_n.$$

Un raisonnement en tous points analogue nous mène à

$$(\star\star) \qquad s_{n+1} = am_n + (1-2a)s_n + ab_n.$$

(2) Comme $\{M_n, S_n, B_n\}$ forme un système complet d'évènements, on a

$$1 = P(\Omega) = P(M_n) + P(S_n) + P(B_n) = m_n + s_n + b_n.$$

Il suit que $b_n = 1 - m_n - s_n$.

(3) En injectant l'expression trouvée à la question précédente dans les relations $(\star)$ et $(\star\star)$, on obtient

$$m_{n+1} = (1-2a)m_n + as_n + a(1 - m_n - s_n) = (1-3a)m_n + a$$

et de même

$$s_{n+1} = (1-3a)s_n + 1.$$

Les deux relations précédentes sont bien des relations de récurrence qui définissent des suites arithmético-géométriques.

(4) On suit alors la méthode du cours menant à l'expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique: on commence par trouver l tel que $l = (1-3a)l + a$, ce qui donne très facilement $l = \frac{1}{3}$, puis en posant $u_n = m_n - l$ on est ramené à une suite géométrique de raison $(1-3a)$ dont on sait alors facilement exprimer le terme général. On final on obtient

$$m_n = (1-3a)^{n-1}\left(m_1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad s_n = (1-3a)^{n-1}\left(s_1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}.$$

Or on sait que le premier jour, le titre est stable. Ainsi $m_1 = 0$ et $s_1 = 1$. Il suit que

$$m_n = \frac{1}{3}\left(1 - (1-3a)^{n-1}\right),$$

$$s_n = \frac{1}{3}\left(1 + 2(1-3a)^{n-1}\right)$$

et

$$b_n = 1 - m_n - s_n = \frac{1}{3}\left(1 - (1-3a)^{n-1}\right).$$

Comme $0 < a < \frac{1}{2}$, il suit que $-\frac{1}{2} < 1 - 3a < 1$ et on peut conclure que $(1-3a)^{n-1}$ tend vers 0, ainsi chacune des trois suites a pour limite $\frac{1}{3}$. Finalement, les trois évolutions tendent à être équiprobables lorsque le nombre de jours tend vers l'infini.

Exercice 2. (Combat de dés)

La résolution de cet exercice nécessite avant tout une bonne modélisation de la situation via l'introduction des bon évènements. Notons alors, pour $1 \leq k \leq 6$, A_k l'évènement "A obtient k lors du lancer de son dé" et, pour $1 \leq j \leq N$, G_j l'évènement "le joueur B gagne lors de sa $j-$ième tentative.

(1) Avec les notations ci-dessus, on doit calculer $P(G_1)$. On observe que la probabilité de cet évènement est conditionnée par le résultat de A. On utilise alors la formule des probabilités totales:

$$P(G_1) = \sum_{k=1}^{6} P_{A_k}(G_1)P(A_k).$$

Or le dé est équilibré donc $P(A_k) = \frac{1}{6}$ pour tout $k \in [\![1;6]\!]$. De plus, pour un dé à 6 faces, il y a $6-(k-1)$ résultats qui sont supérieurs ou égaux à k. On peut donc calculer:

$$P(G_1) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} P_{A_k}(G_1) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{6-(k-1)}{6} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\frac{i}{6} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$$

(2) Pour perdre, il ne faut pas gagner. Notons G l'évènement "le joueur B gagne (au cours de l'une des N tentatives)". Ainsi, on cherche la probabilité de $\overline{G}$. Comme le fait de gagner peut se décomposer en les différentes alternatives de gagner à la $j-$ième tentative, on a l'union disjointe $G = \bigcup_{j=1}^{N} G_j$ et il suit que

$$P(G) = \sum_{j=1}^{N} P(G_j) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{6} P_{A_k}(G_j)P(A_k) = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{6} P_{A_k}(G_j).$$

où la seconde somme découle de la formule des probabilités totales, comme dans la première question. Il faut donc déterminer la probabilité conditionnelle $P_{A_k}(G_j)$. Si on gagne à la $j-$ième tentative, c'est qu'on a échoué aux $(j-1)$ premiers lancers. La probabilité d'échouer à un lancer, sachant que A a obtenu k sur son lancer, est de $\frac{k-1}{6}$ (car il y a $k-1$ valeurs strictement plus petites que k). Ainsi,

$$P_{A_k}(G_j) = \left(\frac{k-1}{6}\right)^{j-1} \times \frac{6-(k-1)}{6}.$$

On injecte alors cette expression dans la double somme précédente, qu'on calcule en permutant les indices, de sorte à faire apparaître la somme des termes d'une suite géométrique.

$$\begin{aligned}
P(G) &= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k-1}{6}\right)^{j-1} \times \frac{6-(k-1)}{6} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{6-(k-1)}{6}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{k-1}{6}\right)^{j-1} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{6-(k-1)}{6}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{k-1}{6}\right)^{j} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{6-(k-1)}{6}\left(\frac{1-\left(\frac{k-1}{6}\right)^N}{1-\left(\frac{k-1}{6}\right)}\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{6-(k-1)}{6}\left(\frac{1-\left(\frac{k-1}{6}\right)^N}{\frac{6-(k-1)}{6}}\right) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\left(1-\left(\frac{k-1}{6}\right)^N\right) = 1 - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k-1}{6}\right)^N = 1 - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{k}{6}\right)^N \\
&= 1 - \frac{1}{6^{N+1}}\sum_{k=1}^{5} k^N.
\end{aligned}$$

Il suit que la probabilité de perdre est donc égale à

$$P(\overline{G}) = \frac{1}{6^{N+1}} \sum_{k=1}^{5} k^N.$$

(3) Pour $N = 3$, on trouve

$$P(\overline{G}) = \frac{1}{6^4} \left(\frac{3(3+1)}{2} \right)^2 = \frac{1}{36}.$$