ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°1

Durée : 3 heures

Toutes les réponses doivent êtres ***justifiées****. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. (Amuse-bouches) *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

Montrer que:

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
$$x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0.$$

(2) $\forall x, y \geq 0$,
$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

(3) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$ distincts,
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2.$$

(4) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x \leq y$,
$$x \leq \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} \leq \frac{x+y}{2} \leq y.$$

(5) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que la fonction polynomiale $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$ vérifie
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x+1) - P(x) = x^2.$$

Exercice 2. (extraits de EDHEC 2000)

(1) Déterminer l'ensemble D des réels tels que $e^x - e^{-x} > 0$.

On définit la fonction f par : $\forall x \in D,\ f(x) = \ln\left(e^x - e^{-x}\right)$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(2) (i) Étudier les variations de f et donner les limites de f aux bornes de D.
(ii) En déduire l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$, puis donner la valeur exacte de α.
(iii) Montrer que le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.

(3) (i) Calculer
$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right).$$
(ii) En déduire l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
(iii) Donner la position relative de (Δ) et (C).

(4) Donner l'allure de la courbe (C) en faisant figurer les droites (Δ) et (T).

On admettra que $\alpha \simeq 0,5$ et que $\sqrt{5} \simeq 2,2$.

Exercice 3. (Valeur approchée du nombre d'or)

Soit ϕ la solution positive de

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

(1) Vérifier que $\phi = \sqrt{1+\phi}$.

(2) Justifier que $1 < \phi < 2$.

(3) Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par

$$\begin{cases} u_1 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

(i) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \geq 1$, on a $1 \leq u_n \leq \phi$.

(ii) Montrer, par récurrence, que $u_{n+1} - u_n \geq 0$. En déduire le sens de monotonie de (u_n).

(iii) Montrer, à l'aide des questions (1) et (2), que, pour tout $n \geq 1$,

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$

(iv) En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \geq 1$,

$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(4) Déterminer le plus petit entier n à partir duquel on est sûr que l'erreur commise en approximant ϕ par u_n est inférieure à 0.01. On pourra utiliser le fait que

$$\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 3,322.$$

(5) Écrire un programme `SciLab` qui permet de calculer le plus petit entier pour lequel l'erreur commise en approximant ϕ par u_n est inférieure à une précision `e` entrée par l'utilisateur.