Devoir Surveillé n°1

Solution

Exercice 1. (Amuse-bouches)

(1) L'équivalence se montre par double implication. Le sens $\Leftarrow$ est trivial: si $x = y = 0$, alors naturellement $x^2 + y^2 = 0 + 0 = 0$. Pour l'autre sens, supposons que $x^2 + y^2 = 0$. Un carré étant toujours positif, on a $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 = 0$. Le double encadrement de x^2 par 0 implique que x^2, et donc x est nul. Le même raisonnement donne également que $y = 0$ et on a bien la conclusion souhaitée. L'équivalence est ainsi démontrée.

(2) Soient $x, y \geq 0$. Les deux nombres étant positifs, leurs racines sont bien définies. On a de plus

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = x + 2\sqrt{xy} + y \geq x + y.$$

Par croissance de la fonction racine, et comme

$$\sqrt{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

(car $x, y \geq 0$), on a l'inégalité souhaitée.

(3) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$ distincts. En particulier, $x - y \neq 0$. De plus,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

En remarquant que $x^2 + y^2 > 2xy$ (car $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 > 0$), on a donc que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} > \frac{2xy}{xy} = 2,$$

ce qui est bien l'inégalité demandée.

(4) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x \leq y$. On commence par calculer

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} = \frac{1}{\frac{x+y}{2xy}} = \frac{2xy}{x + y}.$$

Comme $x \leq y$, on a que $x + y \leq 2y$ et donc, en passant à l'inverse,

$$\frac{2xy}{x + y} \geq \frac{2xy}{2y} = x,$$

ce qui donne la première inégalité. La deuxième inégalité est

$$\frac{2xy}{x + y} \leq \frac{x + y}{2}.$$

En se rappelant que $(x+y)^2 \geq 4xy$ (car $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 \geq 0$), cette inégalité est bien bien vérifiée. Pour la dernière, il suffit d'écrire que

$$\frac{x+y}{2} \leq \frac{y+y}{2} = y.$$

(5) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que la fonction polynomiale $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x+1) - P(x) = x^2.$$

On développe puis réduit afin de procéder par identification

$$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) - ax^3 - bx^2 - cx = 3ax^2 + (3a+2b)x + (a+b+c).$$

Il suit que les paramètres a, b, c vérifient nécessairement

$$\begin{cases} 3a & = & 1 \\ 3a + 2b & = & 0 \\ a + b + c & = & 0 \end{cases}$$

dont on trouve facilement les solutions

$$\begin{cases} a & = & \frac{1}{3} \\ b & = & -\frac{1}{2} \\ c & = & \frac{1}{6} \end{cases}$$

Exercice 2. (extraits de EDHEC 2000)

(1) On résout l'inéquation $e^x - e^{-x} > 0$. Une méthode est de factoriser par e^x. Ainsi,

$$e^x - e^{-x} > 0 \Longleftrightarrow e^x \left(1 - e^{-2x}\right) > 0 \Longleftrightarrow 1 > e^{-2x} \Longleftrightarrow x > 0.$$

Ainsi l'ensemble cherché est $D =]0; +\infty[$.

(2) (i) Par la question précédente, il faut étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
En 0: $e^x - e^{-x} \to 0$ donc $\ln\left(e^x - e^{-x}\right) \to -\infty$.
En $+\infty$: $e^x + e^{-x} \to +\infty$ donc $\ln\left(e^x - e^{-x}\right) \to +\infty$.
La fonction f est dérivable sur D comme composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in D$, on a

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Le dénominateur étant toujours positif sur D (d'après la question (1)), et le numérateur également (c'est une somme d'exponentielles), il suit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in D$ et f est strictement croissante sur D. On ne résiste pas au plaisir de dresser un petit tableau:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

(ii) La fonction f étant continue et ayant une limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'une valeur α pour laquelle la fonction s'annule, *i.e.* $f(x) = 0$. Ainsi, α est solution de l'équation

$$\ln\left(e^\alpha - e^{-\alpha}\right) = 0 \Longleftrightarrow e^\alpha - e^{-\alpha} = 1.$$

On résout alors cette équation en posant par exemple $X = e^{\alpha}$. Il faut donc résoudre

$$X - \frac{1}{X} = 1 \iff \frac{X^2 - X - 1}{X} = 0 \iff X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Comme $X = e^{\alpha}$, X doit nécessairement être positif et en passant au log, on obtient

$$\alpha = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

(iii) Le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) est, par définition, $f'(\alpha)$. Il faut donc faire le calcul, en gardant en tête que $e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 1$:

$$f'(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha}} - e^{-\alpha} = e^{\alpha} + e^{-\alpha} = 2e^{\alpha} - \left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right) = 2 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \sqrt{5},$$

ce qu'on voulait.

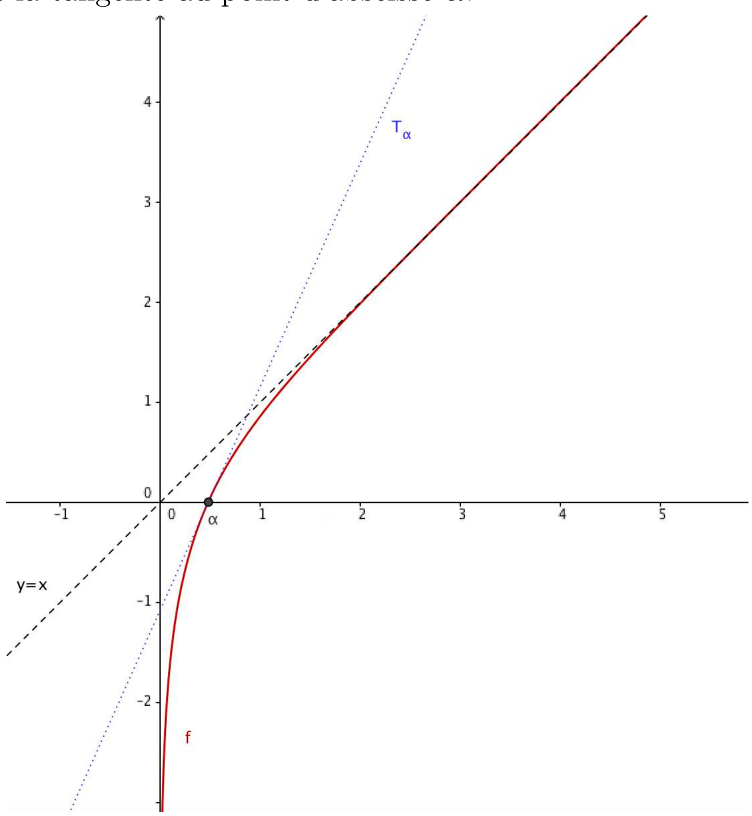
(3) (i) On factorise par e^{x} (qui est la quantité qui tend vers l'infini et qui l'emporte à l'intérieur du log):

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln\left(e^{x}\left(1 - e^{-2x}\right)\right) - x = \ln(e^{x}) + \ln\left(1 - e^{-2x}\right) - x = x + \ln\left(1 - e^{-2x}\right) - x \\ &= \ln\left(1 - e^{-2x}\right) \to 0,\ x \to +\infty. \end{aligned}$$

(ii) On déduit de la limite précédente que la droite d'équation $y = x$ est asymptote (oblique) à la courbe de f en $+\infty$.

(iii) La position relative de la courbe par rapport à son asymptote est donnée par le signe de la différence $g(x) = f(x) - x = \ln\left(1 - e^{-2x}\right)$ qui est toujours négative car $1 - e^{-2x}$ est toujours inférieur à 1. Ainsi, la courbe de f est toujours au dessous de l'asymptote.

(4) Les éléments de l'étude précédente nous permettent de tracer l'allure de la courbe ainsi que son asymptote, et la tangente au point d'abscisse α.



Exercice 3. (Valeur approchée du nombre d'or)

Soit ϕ la solution positive de

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

(1) ϕ étant solution de l'équation précédente, on a $\phi^2 = \phi + 1$. Comme on a choisi $\phi > 0$, on a bien$\phi = \sqrt{1+\phi}$.

(2) La résolution de l'équation du second degré nous permet de trouver la valeur précise de ϕ, à savoir

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Sachant que $1 < \sqrt{5} < 3$, on a directement $1 < \phi < 2$.

(3) (i) On commence par montrer que la propriété est vraie au rang 1. Il est bien sûr vrai que $1 \leq u_1 = 1 \leq \phi$. Supposons alors que, pour un certain $n \geq 1$, on a $1 \leq u_n \leq \phi$. Montrons que la propriété est également vraie au rang $n+1$. Par définition, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. Utilisons alors l'hypothèse de récurrence pour encadrer u_n. Comme $1 \leq u_n \leq \phi$ et que la fonction racine est croissante, on a

$$1 \leq \sqrt{1+1} \leq \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{1+\phi} = \phi,$$

ce qui donne bien l'inégalité au rang $n+1$. Par récurrence, on a bien le résultat voulu pour tout $n \geq 1$.

(ii) On commence par vérifier que $u_2 - u_1 = \sqrt{1+1} - 1 = \sqrt{2} - 1 \geq 0$. On suppose alors que, pour un certain $n \geq 1$, on a $u_{n+1} \geq u_n$. Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est croissante, il suit que $\sqrt{1+u_{n+1}} \geq \sqrt{1+u_n}$, ce qui est exactement la propriété au rang $n+1$. On a donc, par récurrence, le résultat voulu qui permet de conclure que la suite (u_n) est croissante.

(iii) On multiplie par la quantité conjuguée, en se rappelant que $\phi = \sqrt{1+\phi}$

$$\begin{aligned}
|u_{n+1} - \phi| &= \left| \frac{\left(\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi}\right)\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}{\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)} \right| \\
&= \left| \frac{1 + u_n - 1 - \phi}{\sqrt{1+u_n} + \phi} \right| \\
&= \left| \frac{u_n - \phi}{\sqrt{1+u_n} + \phi} \right| \\
&\leq \left| \frac{u_n - \phi}{1+\phi} \right| \qquad (\text{car } \sqrt{1+u_n} > 1) \\
&\leq \left| \frac{u_n - \phi}{2} \right| \qquad (\text{car } \phi > 1),
\end{aligned}$$

et l'inégalité est ainsi démontrée.

(iv) Pour $n = 1$, on a bien, comme $u_1 = 1$ et $1 < \phi < 2 \Longleftrightarrow 0 < \phi - 1 < 1$ que

$$|u_1 - \phi| \leq 1 = \frac{1}{2^{1-1}}.$$

Supposons alors que, pour un certain $n \geq 1$, l'inégalité est bien vérifiée. On utilise alors l'inégalité précédente puis l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \phi| &\leq \left|\frac{u_n - \phi}{2}\right| && \text{(d'après la question précédente)} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} && \text{(d'après HR)} \\ &\leq \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la propriété au rang $n+1$, et la récurrence est ainsi démontrée.

(4) D'après la question précédente, si n est tel que $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 0.01$, alors on a, par transitivité, $|u_n - \phi| \leq 0.01$ et u_n est bien une approximation de ϕ à 0.01 près. Or,

$$2^{-n+1} < 0.01 \Longleftrightarrow (-n+1)\ln(2) < \ln(0.01) \Longleftrightarrow n > \frac{\ln(0.01)}{\ln(2)} + 1.$$

Or, $\ln(0.01) = -\ln(100) = -2\ln(10)$. Comme, on sait que $\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 3,322$, il suffit de prendre le plus petit entier n tel que $n > 6,64 + 1$, c'est à dire à partir de $n = 8$.

(5) Comme on l'a vu dans la question précédente, il suffit de trouver le plus petit n entier tel que $2^{-n+1} < e$. On utilise une boucle `while`. Une solution serait le programme suivant:

```
e=input("Entrer précision pour approximation nombre d or :");
n=1;
u=1;
while u>e
    n=n+1;
    u=2^(-n+1);
end
disp("près.",e," permet une approximation à",n,"Le rang n=")
```