Devoir Surveillé n°2

Durée : 3 heures et 30 minutes

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. (Amuse-bouches) *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

(1) Pour $n \geq 1$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

(a) Montrer que (H_n) est croissante.
(b) Calculer et minorer $H_{2n} - H_n$. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que (H_n) diverge. Avec la question précédente, justifier alors que $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.
(c) Montrer que (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que ces deux suites convergent. Expliquer alors pourquoi la suite (A_n) est elle-même convergente vers une certaine valeur l.

(2) Déterminer l'expression du terme général puis préciser la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \quad \text{et} \quad 9u_{n+2} = 12u_{n+1} - 4u_n.$$

(3) (Dénombrement)
(a) Combien y a-t-il d'anagrammes de "OLD WEST ACTION"[1] ?
(b) Combien y a-t-il de paires (*i.e.* de combinaisons de deux cartes avec la même valeur) dans un jeu de 32 cartes? Combien de "mains" de 5 cartes contiennent deux paires? Combien n'en contiennent qu'une?

(4) Résoudre dans $\mathbb{N}$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$$

(5) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$, que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = 0.$$

(6) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(7) On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x^2(3y - 5) \end{array}$$

L'application est-elle injective? surjective? bijective? Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R}_+^\star)$.

[1] Un petit bonus sera accordé dans le cas où on arrive à trouver l'anagramme correspondant au nom d'un célèbre acteur américain. Naturellement, on ne perdra pas de temps là-dessus non plus.

Exercice 2.

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle y est continue.
(2) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty;0[$ ainsi que sur $]0;+\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
(3) (a) Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x\,e^x - e^x + 1$.
 (b) En déduire le sens de variations de f sur $]-\infty;0[$, puis celui sur $]0;+\infty[$.
 (c) Soit $a < 0$. On considère la suite (a_n) définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \frac{a}{n}$.
  (i) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
  (ii) Déterminer la limite de (a_n). Quelle est alors la limite de la suite $(f(a_n))$?
  (iii) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$a < a_2 < a_n < 0.$$

  En déduire que $f(a) < f(a_2) \leq 0$ et en particulier que $f(a) < 0$.
 (d) Soit $b > 0$. En adaptant le raisonnement de la question précédente, montrer que $f(b) > 0$.
 (e) Résoudre alors $f(x) = 0$.

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n > 0$.
(5) (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) - x = f(-x)$.
 (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
(6) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
(7) Écrire un programme en `SciLab` permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leqslant 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.

Exercice 3. (Soirée déguisée)

Afin de préparer la soirée de fin d'année d'une école de n étudiants, on a disposé dans la salle de détente un sac contenant p petits papiers sur chacun desquels est écrit le nom d'un personnage. Chaque étudiant tire au hasard un papier, puis le remet dans le sac, après avoir pris connaissance du personnage qu'il devra incarner. Il est donc possible que plusieurs personnes arrivent avec le même déguisement le jour de la soirée.

On appelle S_n^p le nombre de tirages pour lesquels tous les personnages seront présents à la soirée.

(1) Que vaut S_n^p si $p > n$? Et si $p = n$? Justifier.
(2) Que vaut S_n^1?
(3) On suppose que $p = 2$. On décomposant le nombres de tirages selon le nombre d'étudiants ayant tiré le premier personnage, montrer que $S_n^2 = 2^n - 2$.
(4) Montrer que

$$S_{n+1}^p = p\left(S_n^p + S_n^{p-1}\right).$$

(<u>indication :</u> on pourra compter le nombre de tirages possibles pour n étudiants, une fois qu'un des $n+1$ étudiants a déjà pioché, en différenciant deux cas, selon que le déguisement déjà tiré par l'étudiant est à nouveau pioché ou non.)

(5) On cherche à montrer, à l'aide d'une récurrence sur $n \geq 1$, que, pour tout $p \geq 1$,

$$(\star) \qquad S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

(a) On suppose que $n = 1$. Vérifier que l'égalité est vraie si on a également $p = 1$.

(b) À l'aide des égalités des questions (5) et (6) de l'Exercice 1., montrer que l'égalité $(\star)$ est encore vérifiée si $n = 1$ et $p > 1$.

(c) On suppose que l'égalité $(\star)$ est vérifiée pour une certaine valeur de $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 1$.

(i) Vérifier qu'elle est encore vérifiée au rang $n + 1$ avec $p = 1$.

(ii) En utilisant la Question (5), puis à l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que l'égalité $(\star)$ est encore vraie au rang $n + 1$ pour $p > 1$.

Exercice 4. (extrait de **EDHEC 2010**)

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

(1) Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

(2) Montrer que, pour tout entier n, on a $u_n \geq 2$.

(3) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

(4) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a $\ln(1 + x) \leq x$.

(5) En déduire que, pour tout entier n, on a

$$1 \leq u_n \leq v_n,$$

où (v_n) est une suite que l'on explicitera et dont on déterminera la limite.

(6) Conclure que la suite (u_n) converge vers un élément l de $[2; e^2]$.