ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°2

Solution

Toutes les réponses doivent êtres ***justifiées****. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. (Amuse-bouches) *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

(1) Ces questions ont déjà été posées, et une solution a été proposée, dans le *Devoir Maison n°6*, auquel on renvoie.

(2) La suite (u_n) est définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \quad \text{et} \quad 9u_{n+2} = 12u_{n+1} - 4u_n.$$

C'est une suite à récurrence linéaire d'ordre 2. Comme présenté dans le cours, la méthode consiste à commencer par introduire et résoudre l'équation caractéristique, ici:

$$9q^2 - 12q + 4 = 0$$

qui admet une unique solution $q_0 = \frac{2}{3}$. Dans ce cas, on sait que le terme général de la suite (u_n) est de la forme

$$u_n = (\lambda + \mu n)\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

où λ et μ sont à déterminer à l'aide des premiers termes. Les deux conditions initiales donnent alors le système

$$\begin{cases} \lambda & = & 1 \\ (\lambda+\mu)\frac{2}{3} & = & 0 \end{cases}. \iff \begin{cases} \lambda & = & 1 \\ \mu & = & -1 \end{cases}$$

et il suit que

$$u_n = -(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

ce qui permet de voir, par croissance comparée, que la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(3) (Dénombrement)

(a) "OLD WEST ACTION" comporte 13 lettres mais certaines sont répétées: il y a deux O et deux T, il faut donc diviser le nombre de permutations des 13 lettres par le nombres de permutations de chacune des lettres répétées. Au final, on trouve

$$\frac{13!}{2! \times 2!}$$

(ce qui donne pour information un résultat de l'ordre de 1.55×10^9). Les afficionados des anagrammes auront reconnu un anagramme de Clint Eastwood.

(b) Une paire est une combinaison de deux cartes de même valeur. Il y a 8 valeurs différentes dans un jeu de 32 cartes. Pour chacune de ces valeurs, on a quatre *couleurs* (carreau, coeur, pique et trèfle). Pour former une paire, il fut donc choisir 2 couleurs parmi les 4, soit $\binom{4}{2} = 6$. Il y a donc $8 \times \binom{4}{2} = 48$ paires dans un jeu de 32 cartes.

Pour avoir deux paires dans une main de 5 cartes, il faut choisir ces deux paires parmi les 48 qui existent puis choisir la cinquième carte. Attention cependant, il ne faut pas choisir deux paires d'une même valeur, sinon on obtient un carré et de plus si on choisit comme dernière carte une carte avec la même valeur que celle d'une des paires, la paire se transforme en brelan et cela ne satisfait plus la contrainte des deux paires. On compte donc de la façon suivante:

- On choisit la valeur de la première paire: 8 choix possibles.
- On choisit la paire formée de carte de la valeur choisie: 6 choix possibles.
- On choisit la valeur de la seconde paire: 7 choix possibles.
- On choisir la paire pour la seconde valeur: 6 choix possibles.
- On choisit la cinquième carte parmi les cartes restantes qui n'ont pas la valeur d'une des deux paires: 24 choix.
- On multiplie les choix. Attention, avec cette méthode de dénombrement, on a mis un ordre sur le choix des paires, il faut donc diviser le résultat par le nombre de permutations des deux paires, soit 2.

Au final, le nombre de mains avec exactement deux paires est

$$(8 \times 6 \times 7 \times 6 \times 24) \times \frac{1}{2} = 24192.$$

Une autre méthode aurait été de choisir les deux valeurs dont on prendra des paires (il y a $\binom{8}{2}$ choix) puis de compter le nombre de paires pour chacun de ces choix ($\binom{4}{2} \times \binom{4}{2}$) et enfin de choisir la dernière carte, toujours parmi 24.. On retombait bien sur le même résultat:

$$\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times 24 = 24192.$$

Pour les mains avec une seule paire, c'est plus compliqué qu'il n'y parait et il y a plusieurs façons d'arriver au résultat. Une première méthode consiste à choisir la première paire puis à multiplier par le nombre de choix des trois autres cartes (parmi 28) qui ne contiennent pas d'autre paire ni de brelan (dont on compte le nombre de la même manière que les paires):

$$\underbrace{\binom{8}{1} \times \binom{4}{2}}_{\text{choix de la paire}} \times \left(\underbrace{\binom{28}{3} - \underbrace{\binom{7}{1} \times \binom{4}{2} \times 24}_{\text{sans autre paire}} - \underbrace{\binom{7}{1} \times \binom{4}{3}}_{\text{sans brelan}}}_{\text{3 autres cartes}} \right) = 107520.$$

Une autre méthode était de remarquer que pour les 3 autres cartes, il suffisait de choisir trois valeurs différentes et que pour chaque choix de tels triplets de valeurs, il y avait 4^3 possibilités. On a bien

$$\underbrace{\binom{8}{1} \times \binom{4}{2}}_{\text{choix de la paire}} \times \binom{7}{3} \times 4^3 = 107520.$$

Remarque. On peut alors remarquer que la probabilité p d'avoir au moins une paire est assez élevée. En effet, il y a $\binom{32}{5} = 201376$ tirages possibles et on obtient donc

$$p = \frac{107520 + 24192}{201376} \simeq 0.6082$$

(4) On commence par constater que, d'après la formule du triangle de Pascal,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n \quad &\Longleftrightarrow \quad n + \binom{n+1}{3} = 5n \Longleftrightarrow \binom{n+1}{3} = 4n \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} = 4n \\
&\Longleftrightarrow \quad n\left((n+1)(n-1) - 24\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad n(n^2 - 25) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad n = 0 \text{ ou } n = 5 \qquad\qquad (\text{car } n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

(5) On veut montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = 0.$$

- L'égalité se vérifie facilement pour $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} (-1)^{1-k} = (-1)^1 \binom{1}{0} + (-1)^0 \binom{1}{1} = -1 + 1 = 0.$$

- Supposons alors que l'égalité a lieu pour un certain $n \geq 1$. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} &= (-1)^{n+1} \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} + (-1)^0 \binom{n+1}{n+1} \\
&= (-1)^{n+1} + 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) (-1)^{n+1-k} \qquad (\text{triangle de Pascal}) \\
&= (-1)^{n+1} + 1 + (-1) \times \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} (-1)^{n-(k-1)} \\
&= (-1)^{n+1} + 1 - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \\
&= (-1)^{n+1} + 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} - (-1)^n \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} - 1 \right) \\
&= (-1)^{n+1} + 1 - (0 - (-1)^n) + (0 - 1) \qquad (\text{par H.R.}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et la récurrence est ainsi démontrée.

(6) Soient $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$. Alors,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \frac{n \times (n-1)!}{((n-1)-(k-1))! \times k \times (k-1)!} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}.$$

(7) On considère l'application

$$f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x^2(3y-5)$$

La définition de f faisant intervenir du x^2 il est facile de voir qu'elle n'est pas injective: par exemple

$$f(-1,1) = -2 = f(1,1).$$

La surjectivité n'est pas difficile à observer si on s'y prend de manière astucieuse. On sait que $y \mapsto 3y-5$ est surjectif de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, il suffira de choisir $x=1$. Plus précisément, soit $z\in\mathbb{R}$. On cherche $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y)=z$. En prenant $x=1$, il suffit de trouver y tel que $3y-5=z$ ce qui donne facilement $y=\frac{z+5}{3}$. Au final, on a trouvé (au moins) un antécédent de z par f: le couple $\left(1,\frac{z+5}{3}\right)$. Ce n'est pas le seul antécédent. Il était par ailleurs possible de procéder différemment.

Par définition, $f^{-1}\left(\mathbb{R}_+^\star\right)$ est l'ensemble des éléments $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ dont l'image par f est un élément de $\mathbb{R}_+^\star$. On écrit donc

$$\begin{aligned}(x,y)\in f^{-1}\left(\mathbb{R}_+^\star\right) &\iff x^2(3y-5)>0 \iff (x\neq 0) \text{ et } (3y-5>0)\\ &\iff (x\neq 0) \text{ et } (y>\frac{5}{3})\\ &\iff (x,y)\in\mathbb{R}^\star\times\left]\frac{5}{3},+\infty\right[\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$f^{-1}\left(\mathbb{R}_+^\star\right)=\mathbb{R}^\star\times\left]\frac{5}{3},+\infty\right[.$$

Exercice 2.

On considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right), & \text{si } x\neq 0.\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

(1) Pour montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, il faut montrer que l'argument à l'intérieur du logarithme est strictement positif, pour tout $x\neq 0$. Il y a plusieurs façons de procéder. On peut faire comme suit. Si $x>0$, alors $e^x>1$ donc $e^x-1>0$ et $f(x)>0$ comme quotient de terme strictement postifs. Si $x<0$, $e^x-1<0$ et $f(x)$ reste strictement positif comme quotient de nombres tous deux strictement négatifs.

La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme composée de fonctions continues. La seule chose à vérifier pour garantir la continuité est que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Or, on sait que $\frac{e^x-1}{x}\longrightarrow 1$ (c'est une forme indéterminée bien connue, obtenue notamment comme limite du taux de variations). Comme $\ln(1)=0$, on a bien que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est nulle et la fonction f est bien continue.

(2) Sur chacun des deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, f est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Le calcul donne, pour $x\in\mathbb{R}^\star$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\frac{e^x\times x-(e^x-1)}{x^2}}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\times\frac{x}{e^x-1}\\ &= \frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}.\end{aligned}$$

(3) (a) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut $g'(x) = xe^x$, quantité dont il est très facile d'obtenir le signe et qui nous donne donc immédiatement les variations de g. Plus précisément, le tableau donne

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, on constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$ (c'est même strictement positif pour $x \neq 0$).

(b) On constate qu'avec les notations précédentes, on a, pour $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(e^x-1)}$. D'après la question précédente, le signe de $f'(x)$ est donc donné par celui de $x(e^x - 1)$ qui est une quantité strictement positive (ce qui se vérifie de la même façon que dans la première question de cet exercice). Ainsi, f est strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

(c) Soit $a < 0$. On considère la suite (a_n) définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \frac{a}{n}$.

(i) La suite (a_n) est clairement (strictement) croissante:

$$a_{n+1} = \frac{a}{n+1} > \frac{a}{n} = a_n$$

car $a < 0$.

(ii) Les résultats classiques sur les limites de référence nous permettent d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Comme la fonction f est continue (et on ne peut se passer de cette condition, donc il est impératif de le mentionner), on a que $f(a_n) \to f(0) = 0$.

(iii) La stricte croissance de (a_n) entraîne que, pour tout $n > 2$,

$$a < a_2 < a_n < 0.$$

Tous les termes de la suite (a_n) sont strictement négatifs. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$, donc

$$f(a) < f(a_2) < f(a_n).$$

En passant à la limite dans la seconde inégalité, on obtient

$$f(a) < f(a_2) \leq \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = 0$$

ce qui donne en particulier que $f(a) < 0$.

(d) Soit $b > 0$. Le même raisonnement adapté à la suite (b_n) définie par $b_n = \frac{b}{n}$ (cette fois décroissante vers 0) permet d'affirmer que $f(b) > 0$.

(e) D'après les deux questions précédentes, on peut facilement déduire que $f(x) = 0 \iff x = 0$.

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(4) On procède par récurrence. L'initialisation est donnée par le texte. Supposons donc que $u_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Grâce à la question (3)(d), il suit que $u_{n+1} = f(u_n) > 0$ et la récurrence est bien démontrée.

(5) (a) On vérifie

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \ln(e^x) \\ &= \ln\left(\frac{e^x - 1}{xe^x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x(1 - e^{-x})}{xe^x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{-(e^{-x} - 1)}{-(-x)}\right) \\ &= f(-x), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait (et qui va être bien pratique pour la suite).

(b) D'après les questions (3)(c) et (3)(d), on conclut que $f(x) - x < 0$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(c) Le sens de variations de (u_n) est donné par le signe de $u_{n+1} - u_n$, c'est à dire de $f(u_n) - u_n$. On a vu que tous les termes de la suite (u_n) étaient strictement positifs et la question précédente nous permet donc d'en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

(6) La suite (u_n) est décroissance et minorée (par 0). Par le théorème de convergence monotone (que l'on se doit de citer), la suite est donc convergente vers une limite l. On sait de plus que l vérifie $f(l) = l \iff f(l) - l = 0 \iff f(-l) = 0$. Or d'après la question (3)(e), la seule solution possible est $l = 0$. On en déduit donc que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

(7) Le programme à écrire est très classique, il nécessite l'utilisation d'une boucle `while`. On en propose une version ci-dessous.

```
u=1; // initialisation de la suite
n=0; // initialisation du rang

while u>=10^(-3)
    u=log((exp(u)-1)/u);
    n=n+1;
end

disp(n, "Le rang du premier terme plus petit que 0.001 est ")
```

Exercice 3. (Soirée déguisée)

On appelle S_n^p le nombre de tirages pour lesquels tous les personnages seront présents à la soirée.

(1) S'il y a davantage de petits papiers que d'étudiants et qu'ils n'en prennent chacun qu'un, il n'est pas possible de tous les tirer. Ainsi $S_n^p = 0$ si $p > n$. Si par contre $p = n$, cela impose que chaque étudiant doit tirer un papier différent (sinon ils ne seront pas tous tirés). Ainsi, on doit associer à chacun des n étudiants un papier parmi n de manière *bijective*, le nombre de telles associations est exactement le nombre de permutations d'un ensemble à n élements, soit $S_n^n = n!$.

(2) S'il n'y a qu'un petit papier dans le sac, tout le monde pioche le même (et tout le monde sera déguisé pareil, ce qui pourrait finalement s'avérer plutôt rigolo). Il n'y a donc qu'un seul tirage, $S_n^1 = 1$.

(3) Il y a deux papiers dans l'urne. On veut qu'ils soient tous les deux tirés au moins une fois. Cela veut dire qu'on peut avoir k étudiant tirant le premier papier et $n-k$ tirant le second, pour toutes les valeurs de k comprises entre 1 et $n-1$. Pour chaque valeur de k, il faut déterminer lesquels des étudiants tirent ce premier papier,c'est à dire qu'il faut choisir k étudiants parmi n, et il y a $\binom{n}{k}$ choix. Au final,

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 2 = 2^n - 2.$$

(4) Il y a $n+1$ étudiants dans le groupe. On en sélectionne un. Celui-ci a p choix possibles pour le papier qu'il va tirer dans le sac. Pour chacun de ces choix, il faut compter le nombre de choix pour le reste du groupe. Il reste n étudiants qui doivent piocher. Il y a maintenant deux alternatives. Ou bien le déguisement tiré par le premier étudiant est choisi à nouveau et on a donc S_n^p tirages possibles pour les n étudiants, ou bien ce déguisement n'est plus tiré, ce qui laisse S_n^{p-1} choix. En combinant les deux alternatives, on a bien compté tous les tirages pour lesquels tous les déguisements étaient piochés au moins une fois. On obtient bien

$$S_{n+1}^p = p\left(S_n^p + S_n^{p-1}\right).$$

(5) On cherche à montrer, à l'aide d'une récurrence sur $n \geq 1$, que, pour tout $p \geq 1$,

$$(\star) \qquad S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

(a) On suppose que $n = 1$ et $p = 1$. On a précédemment calculé $S_1^1 = 1$. D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k = (-1)\binom{1}{0} \times 0 + (-1)^0 \binom{1}{1} \times 1 = 1,$$

et l'initialisation est bien vérifiée dans ce cas particulier.

(b) On commence par constater que la somme à considérer pourrait débuter à $k = 1$ sans que cela ne change rien. De plus, La Question (6) de l'Exercice 1. nous permet de voir que $k \times \binom{p}{k} = p \times \binom{p-1}{k-1}$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k = p \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p-1}{k-1}.$$

En réindexant par $j = k-1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k = p \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{p-1-j} \binom{p-1}{j} = 0$$

d'après la Question (5) de l'Exercice 1. Or comme $S_1^p = 0$ si $p > 1$, l'initialisation est bien vérifiée dans ce cas-ci également.

(c) On suppose que l'égalité $(\star)$ est vérifiée pour une certaine valeur de $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 1$.

(i) Si $p = 1$, on a encore $S_{n+1} = 1$ et

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k^{n+1} = (-1)^0 \times \binom{1}{1} \times 1^n = 1,$$

et la récurrence est bien vérifiée dans ce cas très particulier.

(ii) Montrons que la récurrence est encore vérifiée si $p > 1$. On commence par utiliser la relation établie à la Question (5) puis l'hypothèse de récurrence=

$$\begin{aligned}
S_{n+1}^p &= p(S_n^p + S_n^{p-1}) && \text{(d'après la Question (5))}\\
&= p\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n + \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-1-k}\binom{p-1}{k}k^n\right) && \text{(d'après HR)}\\
&= p\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}k^n\left(\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k}\right)\right) && \text{(en factorisant)}\\
&= p\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}k^n\binom{p-1}{k-1}\right) && \text{(d'après le triangle de Pascal)}\\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}k^{n+1}\binom{p}{k} && \text{(car } p\binom{p-1}{k-1} = k\binom{p}{k}\text{)},
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité attendue. La récurrence est ainsi démontrée.

Exercice 4. (extrait de **EDHEC 2010**)
Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

(1) On calcule

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1 + \frac{1}{2^0} = 1 + 1 = 2\\
u_1 &= u_0 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3\\
u_2 &= u_1 \times \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}.
\end{aligned}$$

(2) L'inégalité se montre facilement par récurrence. On vient de voir que $u_0 = 2$ ce qui permet de l'initialiser. Supposons alors que $u_N \geq 2$ pour un certain $n \geq 0$. En constatant que $\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geq 1$, on a

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geq u_n \geq 2,$$

et la récurrence est bien démontrée.

(3) L'inégalité obtenue à la question précédente intègre la preuve que la suite (u_n) est croissante.

(4) On a déjà obtenu cette inégalité un bon nombre de fois, notamment dans le cours, au Chapitre 1. On y renvoie donc pour les détails de cette question facile et classique.

(5) Comme $u_n \geq 2$ pour tout $n \geq 0$, tous les termes sont en particulier strictement positifs et on peut calculer le logarithme de u_n. En combinant les propriétés du log, l'inégalité obtenue à la question précédente ainsi que la formule du calcul d'une somme des termes d'une suite géométrique, on a

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

On définit alors

$$v_n = \exp\left(2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)$$

ce qui permet d'écrire, pour tout $n \geq 0$,

$$2 \leq u_n \leq v_n.$$

De plus, les limites de référence et la composition des limites permettent d'affirmer que (v_n) converge vers $e2$.

(6) Le théorème de comparaison permet alors d'affirmer que la suite (u_n) est convergente, vers une limite l. On peut même préciser que l'inégalité précédente permet d'en donner un encadrement:

$$2 \leq l \leq e^2.$$