Devoir Surveillé n°3

Durée : 4 heures

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. (D'après **EML 2005**)
On considère les trois matrices suivantes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer J^2, JK, KJ et K^2.
(2) On pose $L = I + J$.
  (a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $L^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K$.
  (b) Montrer que L est inversible et que, pour $n \in \mathbb{Z}$, on a encore $L^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K$.
  (c) Exprimer, pour $n \in \mathbb{Z}$, L^n en fonction de I, L, L^2 et n.
(3) On introduit maintenant les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

  (a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, montrer que P est inversible et expliciter P^{-1}.
  (b) Montrer que $P^{-1}AP = L$.
  (c) Pour $n \in \mathbb{Z}$, exprimer A^n en fonction de I, A, A^2 et n.

Exercice 2. (D'après **ESCP 1998**)
Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(1) (a) Étudier, suivant la parité de n, le tableau de variations de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n.$$

  (b) Montrer que dans tous les cas

$$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2.$$

  (c) Calculer $f_n(1)$ et en déduire, suivant la parité de n, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x

$$x^{n+1} + x^n = 2.$$

(2) On introduit les deux matrices A et D définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une matrice P telle que $AP = PD$, où P de la forme $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que P est inversible et en déduire D en fonction de A, P et P^{-1}.

(3) On considère l'équation matricielle d'inconnue X matrice carrée de taille 2

$$(E_n) \quad X^{n+1} + X^n = A.$$

(a) En posant $Y = P^{-1}XP$, montrer que X solution de (E_n) est équivalent à Y solution de

$$(E'_n) \quad Y^{n+1} + Y^n = D.$$

(b) Soit Y une solution de (E'_n). On pose

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que, si Y solution de (E'_n), alors Y et D commutent.

(ii) En déduire que $b = c = 0$.

(iii) Quelle sont les valeurs possibles de a?

(iv) Discuter, suivant les valeurs de n, le nombre de solutions de l'équation (E_n).

(c) On note α la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$. Déterminer les solutions de l'équation (E_3) à l'aide de α.

Exercice 3. (D'après **EDHEC 1997**)
Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f_n(x) = x - n\ln(x).$$

(1) **Étude de** f_n.

(a) Étudier f_n et dresser son tableau de variations.

(b) Montrer qu'il existe deux réels u_n et v_n, seules solutions de $f_n(x) = 0$, et tels que

$$0 < u_n < n < v_n.$$

(2) **Étude de** $(u_n)_{n\geq 3}$.

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $1 < u_n < e$.

(b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$ et en déduire que (u_n) est décroissante.

(c) Justifier que (u_n) converge et, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, déterminer sa limite.

(d) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1, \quad \text{puis que} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - 1}{1/n} = 1.$$

(3) **Étude de** $(v_n)_{n\geq 3}$.

(a) Déterminer la limite de (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Calculer $f_n(n\ln(n))$. En déduire que, pour tout $n \geq 3$, $n\ln(n) < v_n$.

(c) On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $g(x) = x - 2\ln(x)$. Étudier g et donner son signe. En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, $2\ln(n) < n$.

(d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$ puis établir que, pour tout $n \geq 3$, $v_n < 2n\ln(n)$.

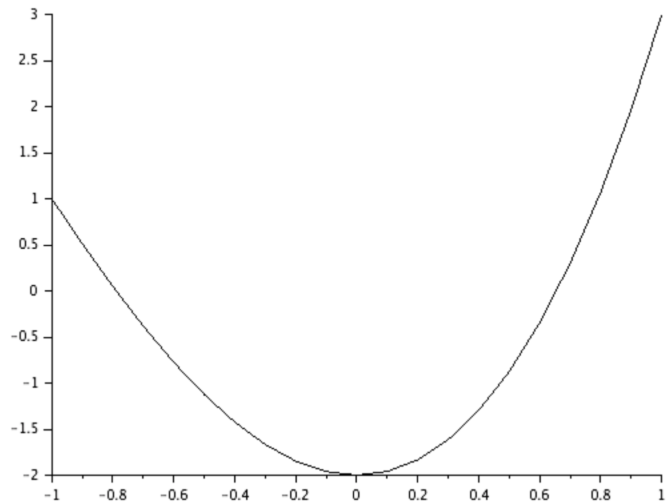
(e) À l'aide des questions précédentes, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1.$$

Exercice 4. (`SciLab` - D'après **FG 2016**) Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1. Principe de Dichotomie.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 4x^2 - 2$. On présente ci-dessous la courbe de g sur $[-1; 1]$ affichée par `SciLab`.



(1) Donner une suite d'instructions qu'on aurait pu utiliser dans la console de `SciLab` pour obtenir la figure ci-dessus (on pensera à définir notamment la fonction g).

(2) Combien de solutions l'équation $g(x) = 0$ admet-elle sur $[-1; 1]$? Donner un encadrement, obtenu par lecture graphique, à 10^{-1}, de chacune des solutions.

(3) On voudrait déterminer les solutions précédentes une précision arbitrairement petite. On utilise pour cela le principe de dichotomie.

   (a) Compléter les trois zones en pointillés de la fonction `SciLab` suivante pour qu'elle renvoie une approximation à `e` près, de l'équation `f(x)=0` sur l'intervalle d'extrémités `a` et `b`.

```
function c=dichotomie(f,a,b,e)
        c=(a+b)/2;
        while abs(b-a)>e & f(c)<>0
            if f(a)*f(c)<0
                b=................
            else
                a=................
            end
        c=.........................
        end
endfunction
```

   (b) Qu'affiche `SciLab` si on saisit `dichotomie(g,-1,1,0.1)`?

Partie 2. Suite de polynômes.

On considère la suite (P_n) de polynômes définie par $P_0 = 2$, $P_1(X) = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+2}(X) = XP_{n+1} - P_n.$$

(1) Expliciter P_2 et P_3. Comment les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 sont-ils représentes dans `SciLab`?

(2) Conjecturer sur le degré de P_n puis démontrer le résultat par récurrence.

(3) On note $a_{n,k}$ le coefficient de degré k du polynôme P_n. Ainsi, $a_{0,0} = 2$, $a_{1,0} = 0$ et $a_{1,1} = 1$.

(a) Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $a_{n,n} = 1$.

(b) Vérifier que

$$P_{n+2}(X) = X^{n+2} + \sum_{k=1}^{n} (a_{n+1,k-1} - a_{n,k})\, X^k - a_{n,0}.$$

(c) En déduire que $a_{n+2,0} = -a_{n,0}$ puis que, pour $1 \leq k \leq n+1$,

$$a_{n+2,k} = a_{n+1,k-1} - a_{n,k}.$$

(4) À l'aide des questions précédentes, compléter les zones en pointillés de la fonction `suitepoly()`, prenant en argument un entier `n` et renvoyant le polynôme `P`$_n$, ci-dessous.

```
function y=suitepoly(n)
    p=[2];
    q=[0,1];
    for i=2:n
        y=zeros(1,i+1);
        y(i+1)=1;
        y(1)=-p(.....);
        p(i+1)=0;
        q(i+1)=0;
        for j=2:i
            y(j)=q(.....)-p(.....);
        end;
        p=q;
        q=.....
    end
endfunction
```