Devoir Surveillé n°3

Solution

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. (D'après **EML 2005**)

(1) Le calcul facile de ces produits matriciels donne $J^2 = K$, $JK = KJ = 0$ (en particulier les deux matrices commutent), et $K^2 = 0$.

(2) On pose $L = I + J$.

(a) On peut procéder de plusieurs manières pour monter l'égalité souhaitée. On peut, vu que I et J commutent (car la matrice identité commute avec toute autre matrice), utiliser la formule du binôme combinée avec le fait que $J^2 = K$ et que $JK = J^3 = 0$ (entraînant donc $J^k = 0$ pour $k \geq 3$):

$$\begin{aligned} L^n &= (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k \\ &= \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 \\ &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K. \end{aligned}$$

(La formule étant vraie pour $n = 0$ car $L^0 = I$). Mais on aurait aussi pu la montrer par récurrence sur n car

$$\begin{aligned} L^{n+1} &= L^n \cdot L \\ &= (I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K)(I+J) \\ &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K + J + nJ^2 + \frac{n(n-1)}{2} KJ \\ &= I + (n+1)J + \left(\frac{n(n-1)}{2} + n \right) K \\ &= I + (n+1)J + \frac{n(n+1)}{2} K, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue au rang $n+1$. Bref, on avait le choix dans la méthode.

(b) On montre l'inversibilité et l'extension de la formule à $n \in \mathbb{Z}$ simultanément. En effet, soit $n \in \mathbb{Z}$ avec $n = -m$ où $m \in \mathbb{N}^\star$. On constate que, utilisant $JK = KJ = 0$ et $J^2 = K$,

$$\begin{aligned}
\left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K\right) \cdot L^m &= \left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K\right)\left(I + mJ + \frac{m(m-1)}{2}K\right) \\
&= I + mI + \frac{m(m-1)}{2}K + nJ + nmK + \frac{n(n-1)}{2}K \\
&= I + (m+n)J + \left(\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + nm\right)K \\
&= I,
\end{aligned}$$

car $n + m = 0$ et

$$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + nm = \frac{m^2 - m + n^2 - n - 2nm}{2} = 0.$$

Ainsi, $L^m = \left(I + mJ + \frac{m(m-1)}{2}K\right)$ est inversible et $(L^m)^{-1} = L^n = L^{-m}$. Pour $m = 1$, on en déduit que L est inversible et comme $(L^m)^{-1} = L^{-m}$, on a bien l'extension de la formule à $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Comme on a

$$L = I + J \qquad \text{et} \qquad L^2 = I + 2J + K,$$

on peut déduire que

$$J = L - I \qquad \text{et} \qquad K = L^2 - I - 2J = L^2 - 2L + I.$$

En injectant ces égalités dans la formule trouvée précédemment, on obtient

$$\begin{aligned}
L^n &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K \\
&= I + n(L - I) + \frac{n(n-1)}{2}(L^2 - 2L + I) \\
&= \left(1 - n + \frac{n(n-1)}{2}\right)I + (n - n(n-1))\,L + \frac{n(n-1)}{2}L^2 \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2}I + (2n - n^2)L + \frac{n(n-1)}{2}L^2.
\end{aligned}$$

(3) (a) On inverse la matrice P à l'aide du pivot de Gauss, en écrivant en parallèle la matrice P et la matrice identité sur laquelle on effectue les mêmes opérations.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On commence par faire l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Puis, on fait $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Enfin, on termine le pivot de Gauss en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

On en conclut que P est inversible et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) On vérifie facilement que $P^{-1}AP = L$.
(c) Comme $P^{-1}AP = L$, on a que $A = PLP^{-1}$ et il suit que, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \left(PLP^{-1}\right)^n = P \cdot L^n \cdot P^{-1} \\ &= P\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} I + (2n - n^2)L + \frac{n(n-1)}{2} L^2\right) P^{-1} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} I + (2n - n^2)PLP^{-1} + \frac{n(n-1)}{2} PL^2P^{-1} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} I + (2n - n^2)A + \frac{n(n-1)}{2} A^2. \end{aligned}$$

Exercice 2. (D'après **ESCP 1998**)

(1) (a) La fonction f_n est polynomiale donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, sa dérivée vaut $f_n'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} = x^{n-1}((n+1)x + n)$. Il suit alors que, le signe de cette dérivée va dépendre de la parité de n, car, selon cette parité, x^{n-1} sera toujours positif ou nul ou changera de signe en zéro. Plus précisément,

- si n est pair, alors $n-1$ est impair et on a le tableau suivant

x	$-\infty$		$\frac{-n}{n+1}$		0		$+\infty$
x^{n-1}		$-$		$-$	0	$+$	
$(n+1)x+n$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- si n est impair, alors $n-1$ est pair et on a le tableau suivant

x	$-\infty$		$\frac{-n}{n+1}$		0		$+\infty$
x^{n-1}		$+$		$+$	0	$+$	
$(n+1)x+n$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Dans tous les cas, on a

$$\begin{aligned} f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) &= \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n} \\ &= (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1+\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{n}{n+1} < 1$ et $1\frac{n}{n+1} < 2$, on a

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1+\frac{n}{n+1}\right) < 2.$$

Il suit que, peu importe la parité de n, l'expression précédente sera toujours strictement inférieure à 2: si n est pair, $(-1)^n = 1$ et c'est alors clair par l'argument ci-dessus, mais si n impair, alors $(-1)^n = -1$ et toute l'expression est négative et donc, *a fortioti*, strictement inférieure à 2.

(c) On a, pour toute valeur de n, $f_n(1) = 2$. Ainsi, 1 est toujours solution de l'équation. D'après les tableaux de variations précédents, le théorème de bijection (f_n étant continue) permet de conclure quant au nombre de racines de l'équation $f_n(x) = 2$. Plus précisément,

- Si n est pair, comme $f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$, il n'y a qu'un seul antécédent et c'est 1.
- Si n est impair, il y a exactement deux solutions; une dans l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{n}{n+1}\right[$ et 1.

(2) (a) On fait le calcul et on résout les équations qui en découlent afin de déterminer x et y:

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x & 1+y \\ 1+x & 1+y \end{pmatrix}$$

et

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}.$$

Il suit que

$$AP = PD \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & + & x & = & 0 \\ 1 & + & y & = & 2 \\ 1 & + & y & = & 2y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -1 \\ y & = & 1 \end{array} \right.$$

(b) La matrice P est inversible, car son déterminant est non nul (il vaut 2) et on a

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$AP = PD \Longleftrightarrow D = P^{-1}AP.$$

(3) (a) On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (E_n) &\Longleftrightarrow X^{n+1} + X^n = A \\ &\Longleftrightarrow P^{-1}\left(X^{n+1} + X^n\right)P = P^{-1}AP \\ &\Longleftrightarrow P^{-1}X^{n+1}P^{-1} + PX^nP = D \\ &\Longleftrightarrow \left(P^{-1}XP\right)^{n+1} + \left(P^{-1}XP\right)^n = D \\ &\Longleftrightarrow Y^{n+1} + Y^n = D \\ &\Longleftrightarrow Y \text{ solution de } (E'_n) \text{ et } Y = P^{-1}XP. \end{aligned}$$

(b) Soit donc Y une solution de (E'_n).

(i) Comme Y est solution de (E'_n), alors D s'exprime comme un polynôme en Y, $D = Y^{n+1} + Y^n$, et comme Y commute avec toute puissance d'elle-même, Y commute avec D.

(ii) Si Y commute avec D, alors $YD = DY$. Le calcul explicite donne

$$YD = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix}$$

et

$$DY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix}.$$

Il suit nécessairement que $b = c = 0$. En particulier, Y est diagonale, et il est facile de calculer ses puissances.

(iii) D'après la question précédentes, on peut calculer $Y^{n+1} + Y^n$:

$$Y^{n+1} + Y^n = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & d^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} + a^n & 0 \\ 0 & d^{n+1} + d^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme Y est solution de (E'_n), on a nécessairement $a^{n+1} + a^n = 0 \Longleftrightarrow a^n(a+1) = 0$ et donc $a = 0$ ou $a = -1$.

(iv) Le nombre de solutions de (E_n) est exactement le même que le nombre de solutions de (E'_n). Pour toutes les déterminer, il reste à trouver les valeurs possibles de d qui doit être solution de

$$d^{n+1} + d^n = 2.$$

Le nombre de solutions de cette équation dépend, comme vu en première partie d'exercice, de la parité de n. Ainsi,

- Si n est pair, il y a une seule solution pour d (qui est $d = 1$) et l'équation (E_n) aura donc deux solutions (car il y a deux possibilités pour a).

- Si n est impair, il y a deux solutions pour d. L'équation (E_n) aura donc quatre solutions.

(c) On note α la solution négative de $x^4+x^3=2$. On sait, d'après toute l'étude précédente, que les solutions de (E_3') sont

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0\\0&\alpha\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \text{et}\quad \begin{pmatrix}-1&0\\0&\alpha\end{pmatrix}.$$

Ainsi, les quatre solutions de (E_3) sont

$$P\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1},\quad P\begin{pmatrix}0&0\\0&\alpha\end{pmatrix}P^{-1},\quad P\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1},\quad \text{et}\quad P\begin{pmatrix}-1&0\\0&\alpha\end{pmatrix}P^{-1},$$

soit les matrices

$$\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha/2&\alpha/2\\\alpha/2&\alpha/2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \text{et}\quad \begin{pmatrix}(\alpha-1)/2&(\alpha+1)/2\\(\alpha+1)/2&(\alpha-1)/2\end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (D'après **EDHEC 1997**)

(1) **Étude de** f_n.

(a) La fonction f_n est (continue et) dérivable sur son ensemble de définition, comme somme de deux fonctions dérivables. On a de plus, pour $x>0$,

$$f_n'(x)=1-\frac{n}{x}=\frac{x-n}{x}.$$

Il est alors très facile de dresser le tableau de variations de f_n:

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f_n	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$n-n\ln(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Comme $n\geq 3$, $\ln(n)>1$ et donc $n-n\ln(n)<0$. Il suit que, f_n étant continue, le théorème de bijection et les variations précédentes permettent d'affirmer que l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions; une dans $]0;n[$ et l'autre dans $]n;+\infty[$. En les notant u_n et v_n, on a bien

$$0<u_n<n<v_n.$$

(2) **Étude de** $(u_n)_{n\geq 3}$.

(a) Il suffit de comparer les images par f_n de 1, de u_n et de e. On a

$$f_n(1)=1>0=f_n(u_n)>e-n=f_n(e)$$

et f_n étant décroissante sur $]0;n[$, on a bien l'encadrement demandé.

(b) On voit que

$$\begin{aligned} f_n(u_{n+1}) &= u_{n+1}-n\ln(u_{n+1})=u_{n+1}-(n+1)\ln(u_{n+1})+\ln(u_{n+1})\\ &= f_{n+1}(u_{n+1})+\ln(u_{n+1})\\ &= \ln(u_{n+1}), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. Or comme $1<u_{n+1}$, il suit que $f_n(u_{n+1})=\ln(u_{n+1})>0$ et donc $f_n(u_{n+1})>f_n(u_n)$ mais la fonction f_n étant décroissante, on en déduit que

$$u_{n+1}<u_n$$

et que (u_n) est décroissante.

(c) Par le théorème de convergence monotone, (u_n) converge (elle est décroissante et minorée par 1). On note ℓ sa limite. L'encadrement établi pour les termes de (u_n) permet d'obtenir $1 \leq \ell \leq e$. Si $\ell > 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(u_n) = +\infty \quad \text{et donc} \quad 0 = \lim_{n\to+\infty} f_n(u_n) = -\infty,$$

ce qui est absurde. Ainsi, on a $\ell = 1$.

(d) On utilise une limite de référence, à savoir $\frac{\ln(1+u)}{u} \longrightarrow 1$, $u \to 0$. Comme $u_n \longrightarrow 1$, $n \to +\infty$, on a $u_n - 1 \longrightarrow 0$ et on peut donc écrire

$$\frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = \frac{\ln\left(1 + (u_n - 1)\right)}{u_n - 1} \longrightarrow 1, n \to +\infty.$$

Par définition de la suite (u_n) et l'étude de sa limite, on a $n\ln(u_n) = u_n \longrightarrow 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{u_n - 1}{1/n} &= \frac{u_n - 1}{\ln(u_n)} \times \frac{\ln(u_n)}{1/n} \\ &= \frac{u_n - 1}{\ln(u_n)} \times n\ln(u_n) \\ &= \frac{u_n - 1}{\ln(u_n)} \times u_n \\ &\longrightarrow 1 \times 1 = 1, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(3) **Étude de** (v_n).

(a) Par comparaison, comme $v_n > n$, on a immédiatement que $v_n \longrightarrow +\infty$, $n \to +\infty$.

(b) Le calcul donne

$$f_n(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n\ln(n)) = n\ln\left(\frac{n}{n\ln(n)}\right) = -n\ln(\ln(n)) < 0$$

car $n \geq 3$ donc $\ln(n) > 1$ et $\ln(\ln(n)) > 0$. Comme $f_n(v_n) = 0$ et que f_n est croissante sur $]n; +\infty[$, il suit que

$$n\ln(n) < v_n.$$

(c) La fonction g est définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 2\ln(x)$. Elle y est également dérivable et $g'(x) = \dfrac{x-2}{x}$. On a immédiatement le signe de la dérivée, le sens de variations et le signe de g (en remarquant que $2 - 2\ln(2) > 0$) :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	$2 - 2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$	‖		$+$		

En particulier, pour tout $n \geq 3$, $g(n) > 0$ ou encore $2\ln(n) < n$.

(d) D'après la question précédente, $2n\ln(n) < n^2$ et

$$f_n(2n\ln(n)) = 2n\ln(n) - n\ln(2n\ln(n)) = n\left(\ln(n^2) - \ln(2n\ln(n))\right) > 0$$

car la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante. Comme la fonction f_n est elle aussi croissante sur l'intervalle où on se trouve, on en déduit que $v_n < 2n\ln(n)$, et on a en fait l'encadrement

$$n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n).$$

(e) En passant au logarithme dans l'encadrement précédent, on a

$$\ln(n) + \ln(\ln(n)) = \ln(n\ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(2n\ln(n)) = \ln(n) + \ln(2) + \ln(\ln(n))$$

et en divisant par $\ln(n)$:

$$1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} < \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} < 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)},$$

le théorème des gendarmes permet alors de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1,$$

car, par croissance comparée,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 0.$$

Exercice 4. (`SciLab` - D'après **FG 2016**) Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1. Principe de Dichotomie.

(1) Les instructions permettant de définir la fonction g et de la représenter sont les suivantes (on a utilisé une décomposition de l'intervalle $[-1; 1]$ en 21, de sorte à obtenir un pas de 0.1, suffisamment petit pour une allure précise)

```
-->function y=g(x); y=x^3+4*x^2-2; endfunction

-->X=linspace(-1,1,21);

-->Y=zeros(1,21); for i=1:21 Y(i)=g(X(i)); end

-->plot2d(X,Y)
```

(2) Par lecture graphique, on constate que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions, notée x_1 et x_2, sur l'intervalle $[-1; 1]$. On peut de plus écrire $-0,8 \leq x_1 \leq -0,7$ et $0,6 \leq x_2 \leq 0,7$.

(3) On a vu, en TP, le principe de recherche de solution par dichotomie. Le programme complété est le suivant

```
function c=dichotomie(f,a,b,e)

        c=(a+b)/2;
        while abs(b-a)>e & f(c)<>0
            if f(a)*f(c)<0
                b=c;
            else
                a=c;
            end
        c=(a+b)/2;
    end
endfunction
```

(4) Si on saisit `dichotomie(g,-1,1,0.1)`, `SciLab` affiche la plus petite des deux racines, avec une précision inférieure à $0,1$. Comme l'intervalle de départ est de longueur 2 et qu'on divise par deux la taille de l'intervalle de recherche à chaque tour de boucle, le programme s'arrête après cinq tours, et affiche
`--> -0.78125`.

Partie 2. Suite de polynômes.

On considère la suite (P_n) de polynômes définie par $P_0 = 2$, $P_1(X) = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+2}(X) = XP_{n+1} - P_n.$$

(1) Par la relation de récurrence, on trouve $P_2(X) = XP_1(X) - P_0(X) = X \times X - 2 = X^2 - 2$ et $P_3(X) = XP_2(X) - P_1(X) = X \times (X^2 - 2) - X = X^3 - 3X$. Les instructions permettant de définir les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 sous `SciLab` sont respectivement `[2]`, `[0,1]`, `[-2,0,1]` et `[0,-3,0,1]`.

(2) D'après le calcul précédent des quatre premiers termes de la suite (P_n), on peut conjecturer que $\deg P_n = n$, ce qu'on montre par une récurrence immédiate. On suppose en effet que, pour un certain entier n, $\deg P_n = n$ **et** $\deg P_{n+1} = n + 1$. En constatant que $\deg XP_{n+1} = n+2$, il suit immédiatement que $\deg P_{n+2} = n+2$, puis que $\deg P_{n+3} = \deg XP_{n+2} = n+3$.

(3) On note $a_{n,k}$ le coefficient de degré k du polynôme P_n. Ainsi, $a_{0,0} = 2$, $a_{1,0} = 0$ et $a_{1,1} = 1$.

(a) On procède par récurrence forte. On montre que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $k \leq n$, on a $a_{k,k} = 1$. Ceci est vrai pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. Supposons que ce soit vrai pour un certain $n \geq 1$. Par définition,

$$P_{n+1}(X) = XP_n(X) - P_{n-1}(X) = a_{n,n}X^{n+1} + Q(X),$$

où $Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}X^{k+1} - P_{n-1}(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Ainsi, on voit (par identification) que $a_{n+1,n+1} = a_{n,n} = 1$, et la récurrence est ainsi démontrée.

(b) Il suffit de développer puis de réduire la relation de récurrence définissant P_{n+2}:

$$\begin{aligned}
P_{n+2}(X) &= X\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}X^k\right) - \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}X^k \\
&= \sum_{j=1}^{n+2} a_{n+1,j-1}X^j - \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}X^k - a_{n,0} \\
&= a_{n+1,n+1}X^{n+2} + a_{n+1,n}X^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} a_{n+1,j-1}X^j - \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}X^k - a_{n,0} \\
&= a_{n+1,n+1}X^{n+2} + a_{n+1,n}X^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(a_{n+1,j-1} - a_{n,j}\right) X^j - a_{n,0}.
\end{aligned}$$

Or, on a vu à la question précédente que $a_{n+1,n+1} = 1$. De plus, une récurrence menée de la même façon permet de voir que, pour tout $n \geq 2$, $a_{n,n-1} = 0$ ainsi $a_{n+1,n} = 0$ et on a bien

$$P_{n+2}(X) = X^{n+2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_{n+1,k-1} - a_{n,k}\right) X^k - a_{n,0}.$$

(c) On procède par identification dans l'égalité précédente. On obtient immédiatement que $a_{n+2,0} = -a_{n,0}$ puis que, pour $1 \leq k \leq n$,

$$a_{n+2,k} = a_{n+1,k-1} - a_{n,k}.$$

(4) Les relations de récurrence ci-dessous permettent de remplir, sans difficulté, le programme.

```
function y=suitepoly(n)
    p=[2];
    q=[0,1];
    for i=2:n
        y=zeros(1,i+1);
        y(i+1)=1;
        y(1)=-p(1);
        p(i+1)=0;
        q(i+1)=0;
        for j=2:i
            y(j)=q(j-1)-p(j);
        end;
        p=q;
        q=y;
    end
endfunction
```