ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°4

Durée : 4 heures

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. (D'après **ESSEC 2002**)

(1) **Résolution numérique de l'équation** $x^2+x-1=0$ $(0<x<1)$.

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par

$$f(x)=\frac{1}{x+1}.$$

(a) Montrer que l'équation $x^2+x-1=0$ a une seule racine réelle appartenant à $]0,1[$, et préciser la valeur de cette racine r_2.
En déduire que r_2 est l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ sur $]0,1[$.

(b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/2,1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/2,1]$.

(c) Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $1/2 \leq x \leq 1$

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

(d) On considère la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
Montrer que pour tout entier n, $u_n \in [1/2,1]$.
Prouver l'inégalité suivante et la convergence de la suite (u_n) vers r_2

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n-r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

(2) **Résolution numérique de l'équation** $x^3+x^2+x-1=0$ $(0<x<1)$.

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}.$$

(a) Montrer que l'équation $x^3+x^2+x-1=0$ a une seule racine réelle r_3 appartenant à $]0,1[$.

(b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/3,1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/3,1]$.

(c) Calculer les dérivées f' et f'' de f et en déduire le maximum de la valeur absolue de $f'(x)$ pour x appartenant à $[1/3,1]$.

(d) On considère la suite défnie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
Majorer $|u_n-r_3|$ en fonction de n et prouver la convergence de la suite (u_n) vers r_3.

(e) Écrire un programme en `SciLab` qui donne une valeur approchée de r_3 à 10^{-8} près.

Exercice 2. (La mouche - Inspiré de **ESCO 1990**)

Dans un appartement, une cuisine ouvre sur un salon qui ouvre sur l'extérieur. À l'instant $n = 0$, une grosse mouche bien agaçante se trouve dans la cuisine. On ouvre grand la fenêtre dans le but de se débarrasser de cette créature nuisible. À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, son trajet obéit aux règles suivantes:

- Lorsqu'elle se trouve dans la cuisine à l'instant n, elle y reste à l'instant $n+1$ avec probabilité $1/3$ ou passe dans le salon avec probabilité $2/3$;
- Lorsqu'elle se trouve dans le salon à l'instant n, elle y reste à l'instant $n + 1$ avec probabilité $1/2$, elle retourne dans la cuisine avec probabilité $1/4$, ou bien sort à l'air libre avec probabilité $1/4$;
- Lorsqu'enfin elle se retrouve dehors, elle ne revient plus.

On introduit les évènements A_n "la mouche est dans la cuisine à l'instant n", B_n "la mouche est dans le salon à l'instant n" et S_n "la mouche sort à l'instant n". On note a_n, b_n et s_n les probabilités correspondantes.

(1) Déterminer $a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1$ et s_2.

(2) Sachant qu'à l'instant $n = 2$ la mouche est dans la cuisine, quelle est la probabilité qu'elle ait été dans le salon à l'instant $n = 1$?

(3) À l'aide d'une formule qu'on citera, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n, \qquad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$

(4) À l'aide de la question précédente, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 2a_n$.

(5) En déduire l'expression des termes généraux de a_n et b_n. Montrer ensuite que, pour $n \geq 2$, $s_n = \frac{1}{4}b_{n-1}$. En déduire l'expression de s_n, pour $n \geq 2$.

(6) On note S l'évènement "la mouche finit par quitter l'appartement". Exprimer S à l'aide des évènements S_n. En déduire que, presque sûrement, la mouche quitte l'appartement.

(7) Retrouver le résultat précédent en montrant que

$$P(S) = 1 - \lim_{n \to +\infty}(a_n + b_n).$$

Exercice 3. (D'après **ESSEC 2006**)

On considère un ensemble $\mathcal{K}$ qui peut être ou bien une partie finie de $\mathbb{N}$ ou bien égal à $\mathbb{N}$ tout entier. Sur l'espace probabilisable $(\mathcal{K}, \mathcal{P}(\mathcal{K}))$, on définit deux probabilités P et Q et on note

$$p_k = P(\{k\}) \quad \text{et} \quad q_k = P(\{k\} \qquad (k \in \mathcal{K}).$$

En particulier, on a $p_k, q_k \geq 0$,

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} p_k = \sum_{k \in \mathcal{K}} q_k = 1,$$

et, si A est une partie de $\mathcal{K}$,

$$P(A) = \sum_{k \in A} p_k.$$

Si $\mathcal{K}$ est fini, on introduit la *distance en variation entre les probabilités* P et Q par la formule

$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k|.$$

(1) On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \{0; 1\}$.

Exprimer $D(P, Q)$, en fonction de p_1 et q_1.

(2) On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \mathbb{N}$.

(a) Montrer, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que la série de terme général $|p_k - q_k|$ est convergente.

On généralise alors la définition de distance en variation entre des probabilités P et Q définies sur $\mathbb{N}$ en posant

$$D(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|.$$

(b) Vérifier que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, $|P(A) - Q(A)| \leq 1$.

(c) Montrer que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$2|P(A) - Q(A)| = \left|\sum_{k\in A}(p_k - q_k)\right| + \left|\sum_{k\in\overline{A}}(p_k - q_k)\right|.$$

(d) En déduire que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$|P(A) - Q(A)| \leq D(P,Q).$$

(e) Montrer qu'en prenant $A = \{k \in \mathbb{N} : \ q_k \geq p_k\}$, l'inégalité précédente devient une égalité.

(f) En déduire que

$$D(P,Q) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k).$$

Exercice 4. (Inspiré de **ISC 1991**)

On considère la série de terme général $a_n = \frac{n-1}{n^3+1}$ (pour $n \geq 1$) et on note (A_n) la suite de ses sommes partielles.

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 < a_n < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

(2) En déduire que la série est convergente. On note A sa somme.

(3) Pour $1 \leq n < N$, on pose $R_{n,N} = \sum_{k=n}^{N} a_k$. Donner un majorant de $R_{n,N}$ dépendant de n et N puis, en faisant tendre $N \to +\infty$, montrer que

$$A - A_n \leq \frac{1}{n}.$$

(4) Que fait alors le programme `SciLab` suivant? Justifier.

```
epsilon=input();
N=floor(1/epsilon)+1;
x=1:N;
a=sum(((x.^3+1).^(-1)).*(x-1));
disp(a)
```