Devoir Surveillé n°4

Solution

Toutes les réponses doivent êtres ***justifiées****. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. (D'après **ESSEC 2002**)

(1) **Résolution numérique de l'équation** $x^2 + x - 1 = 0$ $(0 < x < 1)$.

(a) L'équation $x^2+x-1=0$ se résout via le calcul de son discriminant. On trouve $\Delta = 5$ et il y a donc deux solutions réelles qui sont $r = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Une seule des deux est bien un élément de $]0;1[$, il s'agit de $r_2 = (-1+\sqrt{5})/2$. Comme $\sqrt{5} \geq 2$, on a même que $r_2 \in [1/2;1]$.
Par ailleurs, il apparaît que

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \frac{1}{x+1} = x \Longleftrightarrow 1 = x^2 + x \Longleftrightarrow x^2 + x - 1 = 0,$$

et donc r_2 est bien l'unique point fixe de f dans $]0;1[$.

(b) Pour montrer la stabilité de l'intervalle $[1/2;1]$ sous l'action de f, il faut commencer par déterminer les variations de f. Cette dernière est bien entendu dérivable sur $]0;1[$ (comme inverse d'un polynôme qui ne s'y annule pas) et on a

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

et f est strictement décroissante. Ainsi, si $1/2 \leq x \leq 1$, on aura nécessairement

$$\frac{1}{2} = f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} < 1.$$

(c) D'après les calculs établis à la question précédente, on a, pour tout $x \in [1/2;1]$,

$$|f'(x)| = \| \frac{-1}{(x+1)^2} \| = \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{4}{9},$$

car la fonction $x \mapsto 1/(x+1)^2$ est décroissante et son maximum sur $[1/2;1]$ est alors atteint en $x = 1/2$.

(d) En utilisant la stabilité de $[1/2;1]$ par f obtenue à la question (b), une récurrence immédiate et très facile permet de voir que tous les termes de la suite (u_n) sont bien des éléments de l'intervalle. On va donc montrer l'inégalité voulue par une autre récurrence en utilisant l'inégalité des accroissements finis (IAF). Pour $n = 0$, on a $|u_0 - r_2| = (3-\sqrt{5})/2 \leq 1$ car $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$.

Supposons alors que, pour un certain entier $n \geq 0$, $|u_n - r_2| \leq (4/9)^n$ (HR). On a alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - r_2| &= |f(u_n) - f(r_2)| \\ &\leq \frac{4}{9}|u_n - r_2| \qquad \text{(par IAF)} \\ &\leq \frac{4}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \qquad \text{(par HR)} \\ &= \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence. On a pu appliquer l'IAF car (et il faut absolument le mentionner) tous les termes de la suite ainsi que r_2 sont des éléments de $[1/2; 1]$ et que $|f'|$ y est majoré par $4/9$.

Comme $|4/9| < 1$, $(4/9)^n \longrightarrow 0, n \to +\infty$ et, par le théorème des gendarmes, $u_n - r_2$ tend vers 0 ou encore

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = r_2.$$

(2) **Résolution numérique de l'équation** $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ **(**$0 < x < 1$**)**.

(a) Notons g la fonction définie (et continue et dérivable - comme polynôme) sur $]0; 1[$ par $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$. La dérivée de g est égale à $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ qui est une fonction polynomiale de degré 2, de discriminant strictement négatif et donc de signe constant strictement positif. Ainsi, g est strictement croissante. Par le théorème de bijection, g réalise une bijection de $]0; 1[$ sur $]g(0); g(1)[=] - 1; 2[$. Comme 0 en est un élément, il en existe un unique antécédent r_3 par g.

(b) Soit $x \in [1/3; 1]$. On raisonne par équivalences successives sur les encadrements (on pourrait aussi dériver et regarder les variations, mais on déteste la routine).

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \leq x \leq 1 &\iff \frac{13}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 \leq x^2 + x + 1 \leq 1^2 + 1 + 1 = 3 \\ &\iff \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{9}{13} \\ &\implies \frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(c) f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur $]0; 1[$) comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule jamais. On obtient:

$$f'(x) = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

et

$$f''(x) = -\frac{2(x^2 + x + 1)^2 - 2(2x + 1)^2(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)^4} = 2\frac{3x(x + 1)}{(x^2 + x + 1)^3}.$$

Il est facile de dresser le tableau de variations de f':

x	$1/3$		1
$f''(x)$		$+$	
f'	$\frac{-135}{169}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$

En particulier, $f'(x) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right) = -135/169$ et donc $|f'(x)| = -f'(x) \leq 135/169$.

(d) On ré-applique le raisonnement précédent. Une première récurrence immédiate permet de voir que, par stabilité de $[1/3;1]$ sous l'action de f, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[1/3;1]$. On remarque que r_3 est le seul point fixe de f dans ce même intervalle (comme $g(1/3) = -14/27 < 0$, on a bien $r_3 > 1/3$). On peut donc appliquer l'IAF pour obtenir $|u_{n+1} - r_3| \leq (135/169)|u_n - r_3|$. La même récurrence que précédemment donne alors

$$|u_n - r_3| \leq \left(\frac{135}{169}\right)^n$$

car $|u_0 - r_3| = 1 - r_3 \leq 2/3 \leq 1$. Comme $(135/169)^n \longrightarrow 0$, on a encore

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = r_3.$$

(e) Une valeur approchée de r_3 à 10^{-8} sera donnée par u_n dès lors que n est tel que $(135/169)^n \leq 10^{-8}$. Le script est donc le suivant:

```
u=1;
n=0;
while (135/169)^n > 10^(-8)
    u=1/(u^2+u+1);
    n=n+1;
end
disp(u)
```

Exercice 2. (La mouche - Inspiré de **ESCO 1990**)

(1) D'après les données et les notations du texte, on a

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \qquad \text{(la mouche commence dans la cuisine)}\\
b_0 &= 0\\
s_0 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{3} \qquad \text{(elle est restée dans la cuisine avec probabilité} 1/3)\\
b_1 &= \frac{2}{3}\\
s_1 &= 0 \qquad \text{(elle ne peut pas encore être sortie)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_2 &= P(A_0 \cap B_1 \cap S_2) = P(A_0)P_{A_0}(B_1)P_{A_0\cap B_1}(S_2)\\
&= 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

(2) On utilise la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_{A_2}(B_1) &= \frac{P(B_1\cap A_2)}{P(B_1\cap A_2)+P(A_1\cap A_2)} \\ &= \frac{P_{B_1}(A_2)P(B_1)}{P_{B_1}(A_2)P(B_1)+P_{A_1}(A_2)P(A_1)} \\ &= \frac{(1/4)(2/3)}{(1/4)(2/3)+(1/3)(1/3)} \\ &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

(3) On utilise la formule des probabilités totales en conditionnant par les positions de la mouche à l'instant n et en suivant les probabilités de mouvement de la mouches données par l'énoncé. On note $\overline{C}_n = \overline{A}_n \cap \overline{B}_n$ l'évènement "la mouche est dehors à l'instant n.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n)+P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n)+P_{\overline{C}_n}(A_{n+1})P(\overline{C}_n) \\ &= \frac{1}{3}a_n+\frac{1}{4}b_n \end{aligned}$$

car $P_{\overline{C}_n}(A_{n+1})=0$. De même, on trouve immédiatement l'autre formule

$$b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n.$$

(4) On procède par récurrence. Pour $n=1$, on a bien $b_1=2/3=2a_1$. Ensuite, on a

$$2a_{n+1}=2\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{4}b_n\right)=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n=b_{n+1}.$$

(5) En injectant cela dans la relation de récurrence portant sur a_{n+1}, on trouve

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{4}\times 2a_n=\frac{5}{6}a_n,$$

et la suite (a_n) est géométrique de raison $5/6$. Son premier terme étant $a_1=1/3$, on a (pour $n\geq 1$)

$$a_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}, \qquad b_n=2a_n=\frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}.$$

D'autre part, la mouche sort à l'instant n si elle était dans le salon à l'instant à l'instant $n-1$ avec probabilité $1/4$. On a donc, pour $n\geq 2$,

$$s_n=\frac{1}{4}b_{n-1}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

(6) La mouche a quitté l'appartement si, à un moment, elle est sortie, donc

$$S=\bigcup_{n=2}^{+\infty}S_n.$$

Ces évènements étant deux à deux incompatibles (elle ne peut pas sortir à deux moments différents), on a

$$\begin{aligned} P(S) &= \sum_{n=2}^{+\infty} s_n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{5}{6}} - 1\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et presque sûrement la mouche s'en va vers d'autres cieux.

(7) Notant $C_n = A_n \cup B_n$, on voit que la suite $(\overline{C}_n)$ est croissante: une fois sortie, la mouche ne revient pas. Ainsi,

$$P(S) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{C}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(\overline{C}_n) = \lim_{n\to+\infty}(1 - a_n - b_n) = 1,$$

car $a_n \to 0$ et $b_n \to 0$. On retrouve le résultat précédent.

Exercice 3. (D'après **ESSEC 2006**)

(1) On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \{0; 1\}$.

Par définition,

$$D(P,Q) = \frac{1}{2}\left(|p_0 - q_0| + |p_1 - q_1|\right).$$

Or, $p_0 = P(\{0\}) = 1 - P(\{1\}) = 1 - p_1$et de même $q_0 = 1 - q_1$ donc $p_0 - q_0 = p_1 - q_1$ et on obtient

$$D(P,Q) = |p_1 - q_1|.$$

(2) On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \mathbb{N}$.

(a) On montre la convergence de la série par comparaison. On voit que, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |p_k - q_k| &\leq |p_k| + |-q_k| \\ &= p_k + q_k. \end{aligned}$$

Or, P et Q étant des probabilités sur $\mathbb{N}$, (p_k) et (q_k) sont les termes généraux de deux séries convergentes donc la série de terme général $p_k + q_k$ converge. Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|p_k - q_k|$ est encore convergente.

(b) P et Q étant des probabilités, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on a $0 \leq P(A) \leq 1$ et $0 \leq Q(A) \leq 1$, il suit que $-1 \leq P(A) - Q(A) \leq 1$ ou encore $|P(A) - Q(A)| \leq 1$.

(c) Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Par définition des probabilités P et Q, on a d'une part

$$\begin{aligned} P(A) - Q(A) &= \sum_{k\in A} p_k - \sum_{k\in A} q_k \\ &= \sum_{k\in A} (p_k - q_k) \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} P(A) - Q(A) &= 1 - P(\overline{A}) - 1 + Q(\overline{A}) \\ &= Q(\overline{A}) - P(\overline{A}) \\ &= \sum_{k\in\overline{A}} q_k - \sum_{k\in\overline{A}} p_k \\ &= -\sum_{k\in\overline{A}} (p_k - q_k) \end{aligned}$$

d'où

$$|P(A) - Q(A)| = \left|\sum_{k\in A} (p_k - q_k)\right| = \left|\sum_{k\in\overline{A}} (p_k - q_k)\right|$$

et on obtient bien

$$2|P(A) - Q(A)| = \left|\sum_{k\in A} p_k - q_k\right| + \left|\sum_{k\in\overline{A}} p_k - q_k\right|.$$

(d) D'après la questions précédente,

$$\begin{aligned} |P(A) - Q(A)| &= \frac{1}{2}\left(\left|\sum_{k\in A} p_k - q_k\right| + \left|\sum_{k\in\overline{A}} p_k - q_k\right|\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{k\in A} |p_k - q_k| + \sum_{k\in\overline{A}} |p_k - q_k|\right) \qquad \text{(par inégalité triangulaire)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{K}} |p_k - q_k| \\ &= D(P, Q), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(e) Si $k \in A$, alors $p_k - q_k$ est de signe constant, et même chose si $k \in \overline{A}$. Ainsi, en reprenant le calcul précédent pour ce choix spécifique de partie:

$$\begin{aligned} |P(A) - Q(A)| &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\in A} (q_k - p_k) + \sum_{k\in\overline{A}} (p_k - q_k)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\in A} |q_k - p_k| + \sum_{k\in\overline{A}} |p_k - q_k|\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{K}} |p_k - q_k| \\ &= D(P, Q). \end{aligned}$$

(f) On utilise à nouveau la partie A précédente. Pour $k \in A$, $\min(p_k, q_k) = p_k$. C'est le contraire dans $\overline{A}$. Donc,

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k) &= 1 - \sum_{k \in A} p_k - \sum_{k \in \overline{A}} q_k \\ &= Q(A) - P(A) \\ &= |Q(A) - P(A)| \\ &= D(P, Q). \end{aligned}$$

Exercice 4. (Inspiré de **ISC 1991**)

(1) Pour $n \geqslant 2$, on factorise les différences : (on choisit le plus petit dénominateur commun)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} &= \frac{n^2 - n(n-1) - (n-1)}{n^2(n-1)} \\ &= \frac{1}{n^2(n-1)} > 0 \text{ car } n \geq 2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} - a_n &= \frac{n^3 + 1 - (n-1)n^2}{n^2(n^3+1)} \\ &= \frac{n^2+1}{n^2(n^2+1)} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$,

$$0 < a_n < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

(2) La série $\sum(1/n^2)$ est une série de Riemann convergente. Par comparaison des séries à termes positifs, on conclut que $\sum a_n$ est aussi convergente. On note A sa somme.

(3) On utilise la première question pour calculer le reste et le majorer.

$$\begin{aligned} R_{n,N} &= \sum_{k=n}^{N} a_k \\ &\leq \sum_{k=n}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{N} \qquad \text{(somme télescopique)} \\ &\leq \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Il suit que

$$A - A_n = \lim_{N \to +\infty} A_N - A_n = \lim_{N \to +\infty} R_{n+1,N} \leq \frac{1}{n}.$$

(4) L'entier N calculé par le programme est tel que $(1/N) < \varepsilon$, où ε est une précision arbitraire rentrée par l'utilisateur. Ensuite, le programme calcule A_N (à l'aide de la fonction `sum()` et d'opérations pointées) afin d'obtenir une approximation à ε près de la somme A car la question précédente affirme que l'écart entre A_N et A est inférieur à $(1/N) < \varepsilon$.