Feuille d'exercices n°1

Préliminaires algébriques

1 Logique, quantificateurs et raisonnement.

Exercice 1. (*Le tigre et la princesse.*)
Vous êtes devant deux cellules dont les portes sont fermées. Vous savez que derrière chacune de ces portes se cache soit une princesse sympathique, soit un tigre affamé. Mais vous ne savez pas s'il y a 0, 1 ou 2 tigres. Sur chacune des portes se trouve une information.

(1) Dans cette question, vous savez que soit les deux pancartes mentent, soit elles disent toutes les deux la vérité.
- Porte 1: Au moins une des deux cellules contient une princesse.
- Porte 2: Il y a un tigre dans l'autre cellule.

Que contiennent les cellules?

(2) Même problème, mais cette fois une des deux pancartes ment et l'autre dit la vérité.
- Porte 1: Il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre.
- Porte 2: Il y a une princesse dans une cellule et un tigre dans l'autre.

Que contiennent les cellules?

(3) Cette fois, on sait que l'affiche de la cellule 1 dit vrai si il y a une princesse dedans et faux si c'est un tigre alors que c'est complètement l'inverse pour l'affiche de l'autre cellule.
- Porte 1: Les deux cellules contiennent des princesses.
- Porte 2: Les deux cellules contiennent des princesses.

Que contiennent les cellules?

(4) Cette fois, il y a trois cellules... Il y a une princesse dans l'une d'entre elles, et un tigre dans chacune des deux autres. Une seule des affiches dit vrai.
- Porte 1: Il y a un tigre ici.
- Porte 2: Cette cellule contient une princesse.
- Porte 3: Il y a un tigre dans la cellule 2.

Que contiennent les cellules?

Exercice 2. Soient P et Q deux propositions. Montrer que:
(i) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$;
(ii) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes:

(i) f ne s'annule jamais; (ii) f est inférieure à g; (iii) f est positive;
(iv) f n'est pas positive; (v) f n'est pas la fonction nulle; (vi) f est majoré par 5;
(vii) f est majorée; (viii) f est strictement décroissante.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nier les énoncés qui suivent:

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$; (ii) Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \geq 0$;
(iii) L'application f est croissante; (iv) L'application f est croissante et positive.

Exercice 5. On considère les assertions suivantes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0$;
(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y>0$;
(iii) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0$;
(iv) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2>x$.

(1) Donner la négation de chacune des propositions précédentes.
(2) Sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 6. Nier la proposition suivante :

Tous les habitants Vienne qui ont les yeux verts gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans.

Exercice 7. Compléter les pointillés par le connecteur logique $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$ ou $\Longleftarrow$.

(i) $x^2=4\cdots\cdots x=2$; (ii) $\sqrt{x}$ existe $\cdots\cdots x\geqslant 0$; (iii) $e^x=1\cdots\cdots x=0$;
(iv) $|x|\leq 5\cdots\cdots 0\leq x\leq 5$; (v) $x\in A\cap B\cdots\cdots x\in A$; (vi) $x\in A\cup B\cdots\cdots x\in B$.

2 Calculs.

Exercice 8. Pour $n\in\mathbb{N}$, écrire les expression suivantes sous la forme d'une seule puissance:

$$A=9\times(-3)^{2n};\quad B=(-1)^n\times(-3)^{n-1};\quad C=-4\times(-2)^{n-1};\quad D=-4\times(-2^{n-1})$$
$$E=\frac{1}{2}(-2)^{n-1};\quad F=\frac{1}{4}(-2)^{n+1};\quad G=-4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1};\quad H=4\left(\frac{-1}{2}\right)^{2n+1}.$$

Exercice 9. Simplifier les expressions suivantes; on ne demande pas le domaine de validité (*i.e.* on admet que toutes ces expressions ont un sens):

$$A=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}};\qquad B=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}}-1;\qquad C=\frac{\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{7}\right)}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^3}+\frac{\frac{1}{7}}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2};$$

$$D=\frac{\frac{a^2+b^2}{b}+2a}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}};\qquad E=\frac{2}{x(x-1)}\left(\frac{x^2(x-1)}{2}-\frac{x(x-1)(2x-1)}{6}\right);\qquad F=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}};$$

$$G=\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}};\qquad H=2^n+2^n;\qquad I=\left(2^{2^n}\right)^{2^n};$$

$$J=2^{2^n}\times 2^{2^n};\qquad K=2^{n+1}-2^n;\qquad L=\frac{(2^3\times 7^5)^{-2}}{(7^3\times 2^{-3})^3};$$

$$M=\left[\frac{(3\times 7^2)^{-2}\times 2}{2^{-2}\times 3^3\times 7^{-3}}\right]^{-3};\qquad N=\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3\times\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}\right]^3;\qquad O=\left(-\frac{5^2}{2^4}\right)^{-3}\times\left(-\frac{4}{9}\right)^6;$$

$$P=\frac{(ab^{-1})^3}{c^2b^{-2}}+\frac{(acb^{-1})^{-2}}{bc^{-2}}\times\frac{(a^3b)^2}{(cb)^3};\qquad Q=\frac{(a^2b^{-2})^{-5}}{(c^{-2}b^3)^{-2}}\times\frac{ab-c^{-1}}{c-(ab)^{-1}};\qquad R=\frac{(e^x)^y-e^ye^{-x}}{(e^y)^x-\frac{1}{e^{-y}e^x}};$$

$$S=\frac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{\ln a+\ln b};\qquad T=\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)+2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right);\qquad U=\frac{e^{2\alpha}}{(e^\alpha)^2-\frac{1}{e^{-3\alpha}}}.$$

Exercice 10. Réécrire les expressions suivantes sans le symbole de valeur absolue:

(i) $A(x)=|x+1|$; (ii) $B(x)=|1-2x|$; (iii) $C(x)=3|2x+5|+|x+2|$.

Exercice 11. Dans chaque cas, montrer que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq M$ avec:

(i) $f : x \mapsto x^2$, $I = [-2;3]$ et $M = 6$;
(ii) $f : x \mapsto e^{2x} - 6x$, $I = [0;\ln(2)]$ et $M = 4$;
(iii) $f : x \mapsto \ln(x) - \frac{2}{3}x$, $I = [3;+\infty[$ et $M = \frac{2}{3}$.

Exercice 12. Dans chaque cas, déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

(i)
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a(x+1)(x+2) + b(x+2) = 3x^2 + 2x - 8;$$

(ii)
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}.$$

3 Équations, inéquations

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes:

(i) $x^2 - 6x + 3 = 0$; (ii) $11x - 3x^2 = 22$; (iii) $25x^2 + 20x + 8 = 4$;

(iv) $x - 2 = \sqrt{x}$; (v) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$; (vi) $x - 2 + \dfrac{1}{3-x} = 0$;

(vii) $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$; (viii) $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x+11)$;

(ix) $\ln(-x-2) = \ln(-x-11) - \ln(x+3)$; (x) $\sqrt{x^2-4} = 3 - x$; (xi) $\dfrac{x\sqrt{x-2}}{x-3} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$.

Exercice 14. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, l'existence des solutions réelles de l'équation (E) ci-dessous. Que dire du signe des solutions éventuelles?

$$\text{(E)} \qquad x^2 + 2(m+1)x + 6 - 2m^2 = 0.$$

Exercice 15. Dans chacun des cas suivants, comparer A et B (on pourra bien évidemment discuter en fonction des valeurs de x ou n).

(i) $A = \frac{15}{4}$ et $B = \frac{19}{5}$; (ii) $A = 1 - (\frac{1}{2})^n$ et $B = 1 - (\frac{2}{5})^n$;

(iii) $A = (2x+1)(x-1)$ et $B = x^2 - x$; (iv) $A = \ln(x)$ et $B = (\ln(x))^2$;

(v)$A = \frac{1}{x^2+2x+2}$ et $B = \frac{3}{3x^2+11x+6}$; (vi) $A = \frac{\ln(x)}{1+\ln(x)}$ et $B = \frac{1}{2}$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

(i) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$; (ii) $-9x^2 + 24x - 16 \leq 0$; (iii) $(x-2)(1-x) \geq x(5-x)$;

(iv) $\sqrt{|\ x^2 - 1\ |} \leq x - 5$; (v) $2\sqrt{x^2-1} \geq x$; (vi) $|\ x + 4\ | < 3 - 2x$.

4 Études de fonctions

Exercice 17. Étudier et représenter la fonction f définie par $f(x) = x^{-\ln(x)}$.

Exercice 18. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)e^x + (x+2)$.
À l'aide de la *dérivée seconde* de g, montrer que $\forall x \geq 0,\ g(x) \geq 0$.