ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Feuille d'exercices n°2

Suites, Sommes & récurrence

Exercice 1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Exercice 2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 4$, $n! \geq n^2$.

Exercice 3. Calculer les premiers termes des suites suivantes, conjecturer quant au terme général en fonction de n puis le démontrer:

(1) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.
(2) $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = v_n + n$.
(3) $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_1 = 1$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} u_n$.
(4) $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_n)^2}$.
(5) $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = u_n + 2^n$.

Exercice 4. Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par $u_0 = -1$, $u_1 = -1$ et

$$u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n.$$

(1) Calculer les quinze premiers termes de la suite.
(2) Que peut-on conjecturer pour $u_{n+1} - u_n$? Pour (u_n)?
(3) Démontrer cette conjecture.

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par:

(1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2, \quad n \in \mathbb{N}$.
(2) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}, \quad n \in \mathbb{N}$.
(3) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \ln(1 + |u_n|), \quad n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit (u_n) la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & u_n^2 - 2, \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{N}$, *i.e.* u_n est un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}$.

Exercice 7.

Soit (u_n) la suite réelle définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}.$$

(1) Écrire une formule liant u_n et u_{n-1}.
(2) Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.

Les exercices 8 à 14 ont pour but de s'entraîner, jusqu'à maîtrise totale, à manipuler le symbole Σ.

Exercice 8. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$

i) $2^5+3^5+4^5+\cdots+n^5$ *ii)* $1-a+a^2-a^3+\cdots+(-1)^n a^n$

iii) $\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^4}{4}+\dfrac{a^6}{6}+\cdots+\dfrac{a^{2n}}{2n}$ *iv)* $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{5}+\cdots-\dfrac{2014}{2015}+\dfrac{2015}{2016}$

v) $\ln(1\times 2\times 3\times\cdots\times n)$. *vi)* $\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{2^2}{3}+\dfrac{2^3}{4}+\cdots+\dfrac{2^{2015}}{2016}$

Exercice 9. Écrire les sommes suivantes en faisant en sorte que la première valeur de l'indice soit 0 :

$$\sum_{i=10}^{20} i\,,\quad \sum_{k=-4}^{180}\frac{k}{k+5},\quad \sum_{i=2}^{45}1,\quad \sum_{i=1}^{n} i.$$

Exercice 10. Calculer les sommes suivantes :

$$A=\sum_{k=2}^{2014}(3k+2),\quad B=\sum_{k=4}^{1000}(8k-3),\quad C=\sum_{j=3}^{50}(3j^2+1),\quad D=\sum_{i=3}^{101}i(i-1)(i-2),\quad E=\sum_{p=945}^{2016}3.$$

Exercice 11. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}(2k+1),\quad B_n=\sum_{k=0}^{n+1}(6k^2+4k+1),\quad D_n=\sum_{k=1}^{2n}k(2k-1)(k+1)$$

Exercice 12. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n=\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{3}{10^\alpha},\quad B_n=\sum_{i=0}^{2n}3\times 4^{i+1},\quad C_n=\sum_{j=0}^{n}\frac{5\times 2^j}{3^{j+1}},\quad D_N=\sum_{i=0}^{N+1}3^{2i+1},$$

$$E_r=\sum_{k=0}^{3r}\frac{2^{2k}}{3^{4k}},\quad F_k=\sum_{s=0}^{k}\frac{2^{3s-1}}{3^{2s+2}},\quad G_s=\sum_{m=0}^{3s}\frac{2}{5^{3m+2}},\quad H_l=\sum_{p=0}^{2l+1}x(1-x^2)^{p+1}$$

Exercice 13. (Sommes télescopiques)

(1) Vérifier rapidement que les égalités suivantes :

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},\qquad \frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$$

et

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right).$$

(2) Calculer alors les sommes suivantes

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)},\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Exercice 14. (Sommes doubles) Calculer les sommes suivantes:

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i-1)(n-j+1), \qquad \sum_{1\leq i,j\leq n} a^{i+j}, \qquad \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a^{i+j}.$$

Exercice 15. (extrait de **EDHEC 2010**)

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right).$$

(1) Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
(2) Montrer que, pour tout entier n, on a $u_n \geq 2$.
(3) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
(4) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a $\ln(1+x) \leq x$.
(5) En déduire, pour tout entier naturel n un majorant de $\ln(u_n)$.

...

Exercice 16. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 4$.

(1) Déterminer le réel β tel que la suite v définie par $v_n = u_n - \beta$ soit géométrique.
(2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.
(3) Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 17. On place 2000 euros, avec intérêts annuels composés (*i.e.* à la fin de chaque année, les intérêts sont incorporés au capital),à un taux de 4%, et on ajoute au capital 1000 euros au début l'année suivante.

On note u_n la somme, en euros, dont on dispose à la fin de la n-ème année, en convenant que $u_0 = 2000$.

(1) Calculer u_n pour $n = 1$ et pour $n = 2$.
(2) Calculer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
(3) En déduire une expression de u_n en fonction de n.
(4) Après combien d'années dispose-t-on d'au moins 30 000 euros ?

Exercice 18. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3, \quad n \geq 0$.

(1) Montrer $v_n = u_n + 2n - 1$ est le terme général d'une suite géométrique.
(2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
(3) Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.

Exercice 19. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour tout $n \geqslant 0$ par

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \quad \text{ et } \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n).$$

(1) On pose $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$.
   (i) Montrer que (t_n) est une suite géométrique puis que (s_n) est constante.
   (ii) En déduire l'expression de t_n (resp. s_n) en fonction de t_0 (resp. s_0).
(2) Donner alors les expressions de u_n et de v_n en fonction de n, de u_0 et de v_0.
(3) Écrire un programme `Scilab` qui demande d'entrer un entier n au clavier et qui calcule et affiche les valeurs de u_n et de v_n.

Exercice 20. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 = 2$ et

$$\forall n \geq 0, \qquad u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n + 3.$$

(1) Soit alors (v_n) la suite définie par

$$\begin{cases} v_0 & = & 2 \\ v_{n+1} & = & \frac{1}{2}v_n + 3, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq v_n$.

(2) Expliciter v_n en fonction de n. En déduire une majoration de u_n.

Exercice 21. Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence

$$(E): \qquad u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 6, \quad n \geq 0.$$

On suppose en outre que $u_0 = u_1 = 0$.

(1) Montrer qu'il existe une unique suite constante (α_n) vérifiant la relation (E).

(2) Justifier que la suite (v_n) définie pour $n \geq 0$ par $v_n = u_n - \alpha_n$ vérifie la relation de récurrence:

$$(E'): \qquad v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 0.$$

En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

Exercice 22. On pose $u_0 = -2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$.

(1) À quelle condition sur u_n, u_{n+1} est-il bien ainsi défini?

(2) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n existe et que $u_n < 0$.

On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

(3) Montrer que le terme v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4) Simplifier l'expression de v_{n+1} en fonction de u_n et montrer que pour tout entier n,

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n.$$

(5) Montrer par récurrence que, pour tout entier n,

$$v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

(6) Déterminer enfin u_n en fonction de n.

Exercice 23. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & -1 \end{cases} \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = & 2u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 4v_n \end{cases}$$

(1) On considère la suite (p_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $p_n = u_n + v_n$. Montrer que (p_n) est géométrique. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

(2) À l'aide de la question précédente, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 3^n.$$

(3) Montrer que la suite (z_n), définie pour tout n par $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$, est arithmétique. En déduire l'expression de son terme général.

(4) Donner enfin l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.