Feuille d'exercices n°4

Ensembles, Application & Dénombrement

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$. Montrer, qu'en général,

$$\complement_{E\times F} A \times B \neq \complement_E A \times \complement_F B.$$

Exercice 2. On considère les deux ensembles

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y = 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(t+1, 4t+3) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $A = B$. En déduire une représentation graphique de B.

Exercice 3. (Composition itérée)

Si $f : E \to E$ est une application, on peut composer f avec elle même. En répétant ce processus, on peut le faire n fois. Plus précisément, on note, pour $n \geq 1$

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad (n \text{ fois}).$$

(1) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Que vaut f^n?
(2) Soit alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{x+1}$. Expliciter f^2 puis f^3. Conjecturer puis démontrer, par récurrence, une formule pour f^n.

Exercice 4. Soient $f : E \to F$ une application, $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et $C, D \in \mathcal{P}(F)$.

(1) Montrer qu'on a toujours $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(2) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte. Montrer que si f est injective, alors il y a égalité.
(3) Montrer que

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \quad \text{et} \quad f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

(4) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte. Montrer que si f est injective, alors il y a égalité.
(5) Montrer que $f(f^{-1}(C)) \subset C$. Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte. Montrer que si f est surjective, alors il y a égalité.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}.$$

Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 6. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que:

(1) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
(2) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 7. Calculer les coefficients binomiaux suivants:

$$a = \binom{4}{2}; \qquad b = \binom{6}{2}; \qquad c = \binom{6}{4}; \qquad d = \binom{6}{3};$$
$$e = \binom{7}{3}; \qquad f = \binom{15}{2}; \qquad g = \binom{15}{13}.$$

Exercice 8 (Manipulation de la factorielle)**.**

(1) Factoriser $n! - 2(n-2)!$.

(2) Calculer

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{n},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2} \text{ et } \binom{n}{n-2}$$

(3) Simplifier $A_n = \dfrac{n!}{(n-2)!}$.

Exercice 9 (Vrai ou Faux?)**.**

(1) Pour tout entier naturel n, $(2n)! = 2n!$.

(2) Pour tout entier naturel n, $(2n+1)!$ est impair.

(3) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $n!$ est pair .

(4) Pour tout entier naturel n, $(n+1)! - n! = n \times n!$.

(5) Pour tout entier naturel $n \geq 4$,

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}.$$

(6) Pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1).$$

Exercice 10.

(1) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ et en utilisant la formule du *triangle de Pascal*, que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

et que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

(2) On pose

$$S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

(a) Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$.

(b) En déduire les valeurs de S_n et de T_n (on utilisera les résultats de la première question).

Exercice 11 (Petits dénombrements faciles)**.**

(1) Déterminer le nombre d'anagrammes de chacun des mots suivants :

MALIN, CLASSE, ABRACADABRANTE

(2) Combien de nombres à 9 chiffres peut-on former avec les chiffres : 1,1,1,2,2,3,3,3,7?

(3) De combien de façons peut-on répartir 18 personnes en 4 groupes comprenant respectivement 5, 4, 3 et 6 personnes?

Exercice 12.

(1) Montrer que pour tout $n > 0$,

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{n^n}{n!}, \qquad \text{où } P_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

(2) Calculer pour tout entier $n > 0$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}.$$

Exercice 13 (Formule de Van der Monde)**.**

Une assemblée est composée de n hommes et de p femmes. On forme un comité comprenant a personnes ($0 < a \leq n+p$).

(1) Combien y a t-il de comités comprenant k hommes et $a-k$ femmes?

(2) En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{p}{a-k} = \binom{n+p}{a},$$
où on admet que $\binom{j}{i} = 0$ si $i < j$ ou si $i < 0$.

(3) En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}^2 = n(n-1)\binom{2n-2}{n-2}.$$

(4) En déduire aussi que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 14. M. Dupond emprunte un escalier à n marches pour aller à sa cave. Il descend cet escalier marche par marche ou en sautant une marche.

Par exemple si son escalier comprend 10 marches, il lui arrivera de faire une marche, puis deux, puis encore deux, puis une, puis deux, puis une et enfin une, ce que l'on code sous la forme 1221211.

Soit a_n le nombre de façons différentes de descendre de cette façon un escalier de n marches.

(1) Déterminer a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 (on décrira tous les cas possibles dans chacun des cas proposés)

(2) Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n (on justifiera la réponse).

(3) Écrire un programme Scilab qui demande d'entrer une valeur de n au clavier et qui affiche la valeur a_n.

(4) Exprimer a_n en fonction de n.

(5) L'escalier de M. Dupond comprend 12 marches. De combien de façons peut-il le descendre? S'il change de façon chaque jour, combien de semaines lui faut-il pour toutes les essayer?

Exercice 15 (Problème des rencontres)**.**

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle *dérangement* toute permutation de E ne laissant **aucun** élément invariant. On note D_n le nombre de dérangements de E.

(1) Que vaut nécessairement D_1? Que vaut D_2?

(2) Soit $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$. Combien y a-t-il, en fonction de D_k de permutations de E laissant invariants exactement k éléments? En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!.$$

(3) À l'aide de la formule précédente, déterminer D_3, D_4 et D_5.

(4) Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. A l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes, on numérote les femmes de 1 à 5 , et les hommes de 1 à 5. On les fait ensuite s'élancer sur une piste, chaque homme choisissant au hasard une femme pour partenaire.
   (a) A chaque numéro de femme, on associe le numéro de l'homme avec lequel elle danse. Combien y-a-t-il d'associations possibles?
   (b) Combien y a-t-il d'associations constituées uniquement de couples illégitimes?
   (c) Combien y a-t-il d'associations avec uniquement un seul couple légitime?
   (d) Combien y a-t-il d'associations avec plus de coupes illégitimes que de couples légitimes?