ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Feuille d'exercices n°5

Probabilités élémentaires

Exercice 1.

(1) On tire au hasard simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?
(2) On tire au hasard et successivement, sans remise, 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?
(3) On tire au hasard et successivement, avec remise, 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?

Exercice 2. On lance trois fois consécutives un dé équilibré à 6 faces et les résultats sont respectivement notés a, b et c. On forme alors le polynôme aléatoire $P(x) = ax^2 + bx + c$. Calculer la probabilité que

(1) P ait une seule racine réelle.
(2) P ait deux racines réelles.
(3) P n'ait aucune racine réelle.

Exercice 3. Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement et avec remise 5 cartes.

(1) Calculer la probabilité que le premier as apparaisse :

a) à la première pioche,	b) à la seconde pioche,	c) à la troisième pioche
d) à la quatrième pioche,	e) à la cinquième pioche,	f) jamais.

(2) Reprendre la question précédente avec le second as.

Exercice 4. Dans une loterie, il y a 30 billets dont n sont gagnants. On suppose que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés. On achète deux billets au hasard. Déterminer la probabilité de ne rien gagner et en déduire la valeur de n à partir on a 90% de chances de gagner.

Exercice 5. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 lors d'un lancer est $\frac{1}{2}$.

(1) On lance un dé au hasard parmi les 100 dés et on obtient 6. À l'aide de la formule de Bayes, déterminer la probabilité que le dé choisi soit pipé.
(2) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On choisit un dé au hasard parmi les 100. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé?
(3) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 6. On dispose de deux urnes, $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. La première contient deux boules blanches et trois noires alors que la seconde contient quatre boules blanches et trois noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes:

- On choisit une urne au hasard et on tire la boule dans l'urne choisie
- On note la couleur et on remet la boule dans l'urne dont elle provient
- Si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne $\mathcal{U}_1$, sinon dans l'autre.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note B_n l'évènement "la boule tirée au $n-$ième tirage est blanche" et $p_n = P(B_n)$.

(1) Calculer p_1.
(2) Trouver une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
(3) En déduire la valeur de p_n en fonction de n.

Exercice 7. On dispose de deux dés (cubiques) A et B:

- Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches;
- Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches.

On lance une pièce de monnaie, dont la probabilité d'obtenir "pile" est $\frac{1}{3}$: si on obtient "pile", on ne joue qu'avec le dé A, sinon on ne joue qu'avec le dé B.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir "blanc" au troisième lancer sachant qu'on a obtenu "rouge" aux deux premiers?
(2) On a obtenu n fois "rouge" en n jets du dé. Quelle est la probabilité d'avoir joué avec le dé A?

Exercice 8. Une pièce A donne "face" avec la probabilité $\frac{2}{5}$, une pièce B avec la probabilité $\frac{7}{10}$. On lace une des deux pièces au hasard: si on obtient "face", on continue avec la même pièce, sinon on en change. On effectue comme cela n lancers. On cherche à obtenir p_n la probabilité d'obtenir "face" au $n-$ième lancer. Pour cela, on introduit a_n la probabilité de lancer la pièce A au $n-$ième coup.

(1) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. En déduire l'expression, en fonction de n, de a_n.
(2) Exprimer p_n en fonction de a_n. Conclure.

Exercice 9. Une boîte A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boîte B contient deux jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on les échange. On recommence cette opération n fois. On s'intéresse à la somme des jetons contenus dans la boîte A à l'instant $t = n$. Pour cela, on introduit les évènements :

- P_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 0 ";
- Q_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 1 ";
- R_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 2 ";

On pose également $p_n = P(P_n)$, $q_n = P(Q_n)$ et $r_n = P(R_n)$.

(1) Calculer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1.
(2) Exprimer p_{n+1} (resp. q_{n+1}, resp. r_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n
(3) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad q_{n+2} = \dfrac{1}{2}q_{n+1} + \dfrac{1}{2}q_n$.
(4) En déduire l'expression de q_n en fonction de n puis celle de p_n et de q_n.
(5) Déterminer les limites des trois suites. Interpréter ce résultat.

Exercice 10. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans l'urne, en notant à chaque fois la couleur. On s'intéresse aux évènements:

- A_n "les deux couleurs sont présentes à l'issue des n tirages";
- B_n "on obtient au plus une boule noire".

(1) Déterminer les probabilités, en fonction de n, des évènements A_n et B_n.
(2) Étudier leur indépendance pour $n = 2$ et $n = 3$.