ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Feuille d'exercices n°6

Systèmes linéaires

Exercice 1. Pour chacun des systèmes suivants, répondre aux questions suivantes :

(1) Est-il échelonné (*i.e.* triangulaire)?
(2) Si oui quelles sont les inconnues principales (*i.e.* les pivots) et quelles sont les inconnues secondaires?
(3) Résoudre le système.

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 5 \\ & & 22y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ & & 2y & - & 2z & + & t & = & 1 \\ & & & & 2z & - & t & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 2. Résoudre les systèmes suivants:

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & -5 \\ 2x & + & 13y & - & 7z & = & -1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 4x & - & y & + & 3z & = & -1 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & - & z & + & t & = & 1 \\ 2x & + & 13y & - & 7z & + & 2t & = & 2 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & t & = & -1 \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} y & + & z & + & t & = & -1 \\ x & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$e)\ \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 2 \\ x & + & 2y & = & 1 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}\right. \qquad f)\ \left\{\begin{array}{rcrcr} u & + & w & = & 1 \\ v & + & w & = & 0 \\ u & + & v & = & 12 \\ u & + & 3v & = & 0 \end{array}\right. \qquad h)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & z & + & t & = & -5 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & + & t & = & -1 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3. (Systèmes à paramètres)

(1) On considère le système

$$(E_\lambda)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} (1-\lambda)x & - & 3y & + & 6z & = & 0 \\ 6x & - & (8+\lambda)y & + & 12z & = & 0 \\ 3x & - & 3y & + & (4-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour quelles valeurs de λ, le système (E_λ) est-il de Cramer?
(b) Résoudre le système selon les valeurs de λ

(2) Mêmes questions avec le système suivant

$$(F_\lambda)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\lambda x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & \lambda y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4. Résoudre les systèmes suivants, en fonction de a, b, c et d:

$$(i)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 3y & - & 2z & = & a \\ -4x & + & 4y & + & 3z & = & b \\ 2x & - & 2y & - & z & = & c \end{array}\right. \qquad (ii)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & - & y & - & z & - & t & = & b \\ -x & - & y & + & z & + & t & = & c \\ -3x & + & y & - & 3z & - & 7t & = & d \end{array}\right.$$

$$(iii)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 3z & = & a \\ 3x & + & y & - & 5z & = & b \\ 4x & + & 2y & - & z & = & c \\ x & & & - & 7z & = & d \end{array}\right.$$

Exercice 5. Résoudre les systèmes suivants en fonction du ou des paramètre(s):

$$(i)\quad \left\{\begin{array}{rcrcl} & & y & = & \lambda x \\ x & + & z & = & \lambda y \\ y & + & t & = & \lambda z \\ z & + & u & = & \lambda t \\ & & t & = & \lambda u \end{array}\right. \qquad (ii)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2mx & + & (m-1)y & + & (5-m)z & = & 0 \\ (m-1)x & + & 2my & + & (m+7)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(iii)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array}\right. \quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ et } d \text{ deux-à-deux distincts.}$$

Exercice 6. Soient a et b sont deux réels et n est un entier naturel non nul. On considère le système (S) suivant:

$$(S)\left\{\begin{array}{lclcll} x_2 & = & ax_1 & + & b & \quad L_1 \\ x_3 & = & ax_2 & + & b & \quad L_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ x_n & = & ax_{n-1} & + & b & \quad L_{n-1} \\ x_1 & = & ax_n & + & b & \quad L_n \end{array}\right.$$

(1) Déterminer l'équation obtenue en effectuant l'opération:

$$L_n \longleftarrow a^{n-1}L_1 + a^{n-2}L_2 + \cdots + aL_{n-1} + L_n.$$

(2) En déduire l'ensemble des solutions du système S selon les valeurs de a et b.

Exercice 7. (Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$)

(1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$, définie par $f(x,y,z) = (2x+y, x-3y)$. Montrer que f est surjective. Est-elle injective?

(2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$, définie par $g(x,y) = (x-y, -x+2y, 5x-2y)$. Déterminer $g\left(\mathbb{R}^2\right)$.

(3) Soit h l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$, définie par $h(x,y,z) = (2x+y+z, x-2y)$. Déterminer $h\left(\mathbb{R}^3\right)$.