ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Feuille d'exercices n°7

Fonctions réelles d'une variable réelle I - Continuité

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right);\qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-x;\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x)+7}{x^2+4};\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2};\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Déterminer les limites à droite suivantes:

$$\lim_{x\to 0^+}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor;\qquad \lim_{x\to 0^+}x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor;\qquad \lim_{x\to 0^+}x^2\lfloor\frac{1}{x}\rfloor.$$

Exercice 2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, minorée par 1 et majorée par 2. Étudier

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x};\qquad \lim_{x\to\pm\infty}xf(x);\qquad \lim_{x\to 0}xf(x).$$

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(x)=\lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$.

(1) Étudier la continuité de f en 0.
(2) Montrer que $f(x+1)=f(x)+1$.
(3) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $f:[0;1]\to[0;1]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 5. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifiant:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Après avoir montré que, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(x)=f(x/2^n)$, montrer que f est constante.

Exercice 6. Soit f la fonction définie par $f(x)=x-2+\ln(x)$.

(1) Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur un intervalle à déterminer.
(2) Montrer que la bijection réciproque f^{-1} de f vérifie $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}=1$.

Exercice 7. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)^2=1$. Montrer que $f=1$ ou $f=-1$.

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f(x)=\begin{cases} n, & \text{si } \exists n\in\mathbb{N}^\star,\ x=\frac{1}{n}\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

(1) Montrer que f admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point.
(2) Montrer, par l'absurde, que f, n'est pas continue pas morceaux.

Exercice 9. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$.

(1) (a) Etudiez les variations de f, ainsi que ses limites aux bornes de l'intervalle de définition. Présentez ces résultats sous la forme d'un tableau de variation.
 (b) Montrez que f induit une bijection, notée $\tilde{f}$ de $]0, 1/2[$ sur $]0, \sqrt{2/e}]$. Dressez le tableau de variations de l'application réciproque g de $\tilde{f}$.

(2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Démontrez que l'équation
$$2\sqrt{x}e^{-x} = \frac{1}{n}$$
admet une unique solution dans $]0, 1/2[$, notée a_n.
 (b) Montrez que la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
 (c) En déduire que (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 10. Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(0) = 1$.

(1) On veut montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ admet au moins une solution. Soit $n \geq 1$. On pose, pour $x \in [0; 1 - \frac{1}{n}]$, $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.
 (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.
 (b) Conclure.

(2) *Application.* Un cycliste parcourt 20 km en une heure.
 (a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
 (b) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.

Exercice 11. (Uniforme continuité)

On dit qu'une fonction f est *uniformément continue* sur un intervalle I si
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in I,\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

(1) Écrire, avec les quantificateurs, la négation de l'uniforme continuité de f sur I.

(2) (a) Montrer que si f est uniformément continue sur I, alors f y est également continue.
 (b) On considère $f : x \mapsto x^2$. Soit $\eta > 0$, on pose $x = \eta + \frac{1}{\eta}$ et $y = \frac{1}{\eta}$.
  (i) Estimer $|x - y|$.
  (ii) Minorer $|f(x) - f(y)|$.
  (iii) Que peut-on conclure quand à l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$?

(3) Vérifier que, pour tous $x, y \geq 0$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$. En déduire que $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(4) Soient $f : I \to \mathbb{R}$ uniformément continue et (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de I telles que $(x_n - y_n) \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$.
 (a) Montrer que $(f(x_n) - f(y_n))$ tend aussi vers 0.
 (b) La fonction $x \mapsto 1/x$ est-elle uniformément continue sur $[1; +\infty[$? Sur $]0; 1]$?