ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Feuille d'exercices n°8

Matrices

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

Exercice 2. (Matrices stochastiques)
Un matrice $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si tous ses coefficients sont positifs ou nul et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1:

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!], \quad a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1; n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.

Exercice 3. Soient les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 et B^2 puis conjecturer une formule pour A^n et B^n ($n \in \mathbb{N}^\star$) à démontrer par récurrence.

Exercice 4. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = A - I_3.$$

(1) Calculer B^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
(2) En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. On considère les trois matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer AB puis AC. La matrice A est-elle inversible?
(2) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0$.

Exercice 6. Pour chacune des matrices suivantes, préciser si elles sont inversibles et, le cas échéant, déterminer leur inverse (par la méthode du pivot de Gauss).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. (EN Vétérinaire 1997)

Première Partie

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité de taille 3.

(1) On pose $J = M - I$.
  (a) Calculer J^2 en fonction de J.
  (b) Montrer par récurrence qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que pour tout entier naturel n on ait:
$$M^n = I + u_n J.$$
  (c) Exprimer alors u_{n+1} en fonction de u_n.
  (d) Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n + 1/3$. Montrer que (v_n) est géométrique. En déduire u_n en fonction de n.

(2) Écrire M^n pour tout entier naturel n.

Deuxième partie

Les poules pondent des oeufs que l'on classe suivant trois calibres A, B et C (petits, moyens et gros).

- Si une poule pond un oeuf de calibre A, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de 1/2, 1/4 et 1/4.
- Si une poule pond un oeuf de calibre B, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de 1/4, 1/2 et 1/4.
- Si une poule pond un oeuf de calibre C, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de 1/4, 1/4 et 1/2.
- Pour n entier naturel non nul, on désigne par a_n, b_n et c_n les probablitités respectives pour que le nième oeuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.

On pose alors $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

(1) (a) Calculer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire une matrice carrée U telle que $X_{n+1} = UX_n$ pour tout entier n.
  (b) Exprimer U en fonction de M. En déduire U^n en fonction de n.

(2) On suppose que le premier oeuf pondu par une poule est de calibre C. Déduire des question précédentes a_n, b_n et c_n en fonction de n, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $J(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par
$$J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(1) En utilisant la formule du binôme, déterminer $J(a,b)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(2) On s'intéresse à la suite (v_n) à récurrence linéaire d'ordre 3 suivante
$$\begin{cases} v_0 = 0,\ v_1 = 0,\ v_2 = 1 \\ v_{n+3} = -v_{n+2} + 5v_{n+1} - 3v_n \end{cases}.$$
L'objectif de l'exercice est de déterminer l'expression du terme général de (v_n). On pose alors $V_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \geq 2$,
$$V_{n+1} = AV_n.$$
(b) En déduire V_n en fonction de A, de n et de V_2.
(c) On considère la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
(d) Montrer que
$$A = PJ(1,-3)P^{-1}$$
En déduire A^n.
(e) Conclure.

Exercice 9. (Ecricome 1994)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité de taille 4.

(1) Calculer A^2.
(2) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
(3) Établir par récurrence que pour tout entier n, il existe des réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$. (On exprimera α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n.)
(4) (a) Montrer que la suite (α_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 et déterminer l'expression de α_n en fonction de n.
(b) En déduire celle de β_n.
(5) (a) Prouver que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et de I.
(b) Les expressions de α_n et β_n sont-elles encore valables pour $n = -1$?
(c) Déterminer, pour tout entier n, la valeur de A^{-n}.

Exercice 10. (Edhec 1993)

L'objection de l'exercice est de résoudre une équation matricielle, c'est à dire de trouver toutes les matrices $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $Z^2 = A$, où A est une matrice de la forme
$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}, \qquad 0 < a < 1.$$
Dans toute la suite, on désigne par P la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer P^2 puis P^4. Montrer que P est inversible et trouver sa matrice inverse.
(2) Montrer que la matrice $D_a = P^{-1}AP$ est diagonale.
(3) Soit $Y = P^{-1}ZP$.
(a) Montrer que l'équation $Z^2 = A$ est équivalente à l'équation $Y^2 = D_a$.
(b) On pose alors $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
(i) Ecrire le système de quatre équations $\grave{a}$ quatre inconnues x, y, z et t qui est équivalent à $Y^2 = D_a$.
(ii) Montrer (par l'absurde) qu'aucune solution ne vérifie $x + t = 0$.
(c) En déduire que l'équation $Z^2 = A$ admet 0, 2 ou 4 solutions, selon que $a < 1/2$, $a = 1/2$ ou $a > 1/2$.
(d) Donner les quatre solutions de l'équation dans le cas où $a = 5/8$.