ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Informatique - T.P n°11

Variables aléatoires - Episode 2 (Lois discrètes usuelles)

Exercice 1. (Temps d'attente)

(1) Écrire une fonction `Attente()` prenant en argument p et simulant une loi géométrique de paramètre p.

(2) On s'intéresse à l'expérience suivante. Une urne contient deux lots identiques de n boules chacun. On tire simultanément deux boules dans l'urne. Si elles ne sont pas identiques, elles sont remises dans l'urne et on recommence à tirer jusqu'à l'obtention de deux boules identiques. On note T_n le nombre de tirages effectués. Les deux boules identiques ayant été retirées, il en reste $2(n-1)$ dans l'urne et on recommence le processus jusqu'à vider l'urne. On note
$$Z = T_n + T_{n-1} + ... + T_1$$
le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne complètement.

(a) Écrire une fonction `Y=T(m)` simulant la variable aléatoire T_m.

(b) Écrire, à l'aide de la fonction `T`, une fonction `Y=Z(n)` simulant la variable aléatoire Z.

Exercice 2. (Approximation d'une binomiale par une loi de Poisson)

Soit λ un réel strictement positif, (X_n) une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale
$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$$
et Y une v.a. suivant une loi de Poisson, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. L'objectif de l'exercice est d'illustrer un résultat du cours de deuxième année
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(Y = k).$$

(1) Écrire une fonction `Y=B(n, lambda)` qui calcule $b_k = P(X_n = k)$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$ et renvoie `Y=`$[b_0, b_1, ..., b_n]$. ☞ On pourra remarquer que
$$P(X_n = k+1) = P(X_n = k) \times \frac{\lambda}{n-\lambda} \times \frac{n-k}{k+1}.$$

(2) Écrire une fonction `Y=P(n, lambda)` qui calcule $p_k = P(Y = k)$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$ et renvoie `Y=`$[p_0, p_1, ..., p_n]$.

(3) Écrire un programme qui demande à l'utilisateur de rentrer n et λ et trace les diagrammes à bâtons des deux lois précédentes (on limitera l'affichage à $0 \leq k \leq 10$ et on utilisera l'option `"grouped"` en argument de la fonction `bar()`).

(4) Représenter les diagrammes pour $\lambda = 1, n = 30, n = 100$. Même chose avec $\lambda = 2$.

Dans tous les derniers exercices, on a pu voir comment la fonction `rand()` permettait de simuler la réalisation de certaines expériences ou variables aléatoires. S'il est capital de savoir refaire tous ces exercices et de n'utiliser que la fonction `rand()`, on peut directement appeler les lois usuelles à l'aide de la fonction `grand()`. Plus précisément,

- `Y=grand(m,n,'bin',N,p)` affecte à `Y` une matrice de taille $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi binomiale de paramètres N, p. (Les $n \times m$ variables `Y(i,j)` modélisent des épreuves indépendantes.

- `Y=grand(m,n,'geom',p)` affecte à `Y` une matrice de taille $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi géométrique de paramètre p. (Les $n \times m$ variables `Y(i,j)` modélisent des épreuves indépendantes.

- `Y=grand(m,n,'poi', mu)` affecte à `Y` une matrice de taille $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi de Poisson de paramètre `mu`. (Les $n \times m$ variables `Y(i,j)` modélisent des épreuves indépendantes.

Exercice 3. On suppose que, chaque jour, dans un grand magasin, le nombre d'appel X au service après-vente (SAV), suit une loi de Poisson de paramètre $\mu = 10$. Chaque appel a une probabilité $1/4$ d'être traité avec du retard. On note Z le nombre d'appels traités en retard un jour quelconque.

(1) Écrire une fonction `Y=Retards()` simulant la variable aléatoire Z.

(2) On veut comparer Z à une loi de Poisson de paramètre $5/2$.

  (a) Écrire une une succession d'instructions permettant d'obtenir, à partir de 10000 réalisations de Z un vecteur C tel que $C(k)$ représente la fréquence des réalisations pour lesquelles $Z = k$. (On se limitera à $0 \leq k \leq 10$.)

  (b) Utiliser la fonction `P()` de l'Exercice 2 pour comparer (à l'aide d'un diagramme à bâtons) C à la loi de Poisson susnommée. Que peut-on conjecturer?

(3) Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 4. (Inspiré d'**EDHEC 2015**) Un joueur réalise des lancers indépendants d'une pièce truquée donnant *PILE* avec la probabilité p. On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier *PILE*.

Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que ce joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair. On appelle X la variable aléatoire égale au numéro de la boule extraite.

(1) Montrer que, si $m \in \mathbb{N}$, m est pair si et seulement si $2 \times \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = m$.

(2) Écrire une fonction `Y=Edhec2015(p)` simulant la variable X pour le paramètre p.