
Informatique - T.P n°13

Simulation de variables aléatoires à densité

☞ On rappelle que les instructions `rand(1,N)` ou `rand(1:N)` permettent de créer un vecteur ligne dont les N composantes sont des réalisations (indépendantes) de la loi appelée avec la fonction `rand()` (uniforme ou normale).

Exercice 1. (Avec la fonction `rand()`).

- (1) À l'aide de la fonction `rand()`, écrire une fonction `unif(a,b)` simulant une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$.
- (2) L'instruction `rand('normal')` indique que dorénavant, chaque appel de la fonction `rand()` simulera une loi normale centrée-réduite. Écrire alors une fonction `LaplaceGauss(mu, sigma)` simulant une variable aléatoire de loi de Laplace-Gauss de paramètres μ et σ^2 .

☞ L'instruction `grand(m,n,'nor',mu,sigma)` simule une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (et crée une matrice à m lignes et n colonnes) et `grand(m,n,'exp',lambda)` une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 2. Soient U une variable aléatoire uniforme sur $[0; 1]$, $\lambda > 0$ et

$$V = \frac{-\ln(1-U)}{\lambda}.$$

- (1) Créer un échantillon de taille 10000 de la même loi que V pour $\lambda = 2$.
- (2) Tracer l'histogramme des valeurs de V sur l'intervalle $[0; 2]$ avec 20 classes de même largeur. Sur le même graphique, tracer la courbe de la fonction $t \mapsto 2e^{-2t}$. Que peut-on en déduire?

Concernant la **fonction de répartition** de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, la fonction `cdfnor()` permet de "tout" calculer. Mais il faut être vigilant quant aux cinq arguments (et il y en a toujours cinq!) qu'elle prend. Plus précisément

- `[P,Q]=cdfnor("PQ",x,mu,sigma)` correspond à la formule

$$P = \Phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt, \quad Q = 1 - P.$$

- `X=cdfnor("X",mu, sigma, mu, P, Q)` permet de calculer $\Phi_{\mu, \sigma^2}^{-1}(P)$ en connaissant μ, σ et P mais en précisant $Q = 1 - P$.
- `M=cdfnor("Mean", sigma, mu, P, Q, X)` sert à calculer l'espérance d'une variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ connaissant σ et $P(Z \leq x) = P$.
- `S=cdfnor("Std", mu, X, P, Q)` sert à résoudre le problème analogue avec μ connu mais pas σ (attention à l'ordre des arguments!).

Exercice 3. Comparer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et la fonction de répartition empirique à partir d'un échantillon de taille 1000 sur l'intervalle $[-2; 2]$ avec 50 points.