ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Informatique - T.P n°7

Matrices

Si n et p sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1 et que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix},$$

on peut définir la matrice A dans `SciLab` par la syntaxe

`A=`$[a_{1,1}, ..., a_{1,p}; a_{2,1}, ..., a_{2,p}; ....; a_{n,1}, ..., a_{n,p}]$.

Les coefficients d'une même ligne sont séparés par des virgules et on indique le changement de ligne par un point-virgule.

Si `A` est une matrice déjà définie:

- l'instruction `A(i,j)` renvoie le coefficient à la `i`-ème ligne et `j`-ième colonne.
- l'instruction `size(A)` renvoie le vecteur ligne `[L,C]` où `L` est le nombre de lignes de `A` et `C` le nombre de colonnes. L'instruction `length(A)` renvoie quant à elle le nombre $L \times C$ de ses coefficients.

Les opérations `+` ou `*` permettent de faire des opérations sur les matrices (multiplication par un réel, additions et multiplications de deux matrices lorsque cela a un sens).

Si `A` est une matrice carée déjà définie et si `k` est un entier (naturel), l'instruction `A^k` permet de calculer les puissances de `A`. Si la matrice est inversible, on peut étendre l'instruction à `k` entier relatif.

L'instruction `eye(n,n)` renvoie la matrice identité de taille `n`; l'instruction `zeros(n,p)` construit une matrice ne contenant que des zéros et `ones(n,p)` une matrice ne contenant que des 1.

Enfin, l'instruction `A'` renvoie transposée de la matrice `A`.

Exercice 1.

(1) Définir dans la console `SciLab` les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(2) Que renvoient les instructions suivantes

`A+B`, `A*B`, `A+C`, `A*C`, `A'*C`, `B^2`, `B^(-1)`, `C^(-1)` , `C*C^(-1) - eye(3,3)`?

(3) Que renvoie `A(3)`? `A(5)`?
(4) Taper l'instruction `A(3,3)=1;` puis `A`. Que s'est-il passé?
(5) Même question si on tape `A(4,5)=-2`.

Exercice 2. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur de rentrer un entier strictement positif n et affiche la matrice

$$\left((-1)^{i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n+1} \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(1) Définir les matrices précédentes dans la console `SciLab`.
(2) Calculer $A^2 + A - 2I_3$.
(3) Introduire la matrice $B = \frac{1}{2}(A + I_3)$ puis calculer AB et BA. Ce résultat était-il prévisible?
(4) Taper l'instruction `A^(-1)==B`. Que se passe-t-il?
(5) Vérifier que P est inversible et calculer $Q = P^{-1}$.
(6) Vérifier que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 4. (Polynôme de matrice) Écrire une fonction `polymat()` prenant en argument un polynôme `P` (codé sous forme de vecteur-ligne) et une matrice carrée `A` et renvoyant la matrice `P(A)`.

L'instruction `inv(A)` renvoie également, si la matrice est inversible, l'inverse de `A`. L'instruction `rank(A)` renvoie le **rang** de la matrice, c'est à dire le nombre de pivots non nuls. Si la matrice est carrée et que son rang est égal à son nombre de lignes (ou de colonnes), alors la matrice est inversible.

Exercice 5. Écrire un programme demandant à l'utilisateur de rentrer une matrice carrée, vérifiant que celle-ci est bien carrée puis affichant un message de réponse concernant l'inversibilité de la matrice. Si la matrice est inversible, le programme affichera aussi l'inverse, sinon elle précisera le rang.

Exercice 6. (Résolution de système) On considère le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 2y & & & + & t & = & 3 \\ -5x & + & 3y & - & 2z & + & 2t & = & 3 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & -2 \\ 4x & - & 10y & + & 7z & - & 4t & = & -11 \end{array}\right. .$$

(1) On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$. Introduire une matrice A telle que $AX = B$.
(2) Montrer que le système est de Cramer si et seulement si A est inversible. Comment obtient-on alors X?
(3) Utiliser `SciLab` pour résoudre le système.