ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Informatique - T.P n°7bis

Matrices

La commande `diag()` prend en argument une matrice ligne ou colonne (de longueur n) et créé la matrice diagonale de taille $n \times n$ dont la diagonale est composée des coefficients de la matrice ligne ou colonne en argument. En ajoutant un paramètre `1` ou `-1` en second argument de `diag()`, les coefficients apparaîtront sur la surdiagonale ou sur la sous-diagonale.

Exercice 1.

(1) Taper puis observer ce que font les instructions `diag(2*ones(7,1))` puis `diag(-3*diag(4,1),1)`.

(2) En déduire une suite de commandes permettant de créer la matrice A de taille 8×8 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) Écrire une fonction prenant en argument un entier n, trois réels a, b, c et renvoyant la matrice carrée de taille n ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

Si `A` est une matrice de taille $n \times p$ déjà définie, la commande `A(i,:)` renvoit la $i-$ème ligne de `A`, alors que `A(:,j)` renvoit la $j-$ième colonne.

Exercice 2. (Matrices stochastiques)

On dit qu'une matrice est *stochastique* si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Écrire un programme `test_stochastique.sce` demandant à l'utilisateur de rentrer une matrice et affichant si la matrice est stochastique ou non.

Exercice 3. (Matrices de Vandermonde et interpolation polynomiale)

Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ des réels. On appelle matrice de Vandermonde associée à (x_i) la matrice

$$V(x_0, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

(1) Écrire une fonction `vandermonde()` prenant en argument un vecteur-ligne $[x_0, x_1, ..., x_n]$ et renvoyant la matrice de Vandermonde associée.

(2) Application: on cherche à résoudre un *problème d'interpolation polynomiale.* C'est à dire que, étant donnés $x_0, x_1, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts et $y_0, y_1, ..., y_n$ d'autre réels, on veut trouver un polynôme P de degré $n+1$ tel que

$$\forall i \in [\![0; n]\!], \qquad P(x_i) = y_i.$$

(a) Notant $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ les coefficients du polynôme P, montrer que P solution du problème d'interpolation est équivalent à

$$V(x_0, ..., x_1) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire l'écriture d'une fonction `interpolation()` prenant en arguments deux vecteurs lignes `x=`$[x_0, x_1, ..., x_n]$ et `y=`$[y_0, y_1, ..., y_n]$ et renvoyant le polynôme solution du problème d'interpolation correspondant.