ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Informatique - T.P n°8

Séries & Représenations graphiques

Exercice 1. (Opérations pointées et Séries de Riemann)

☞ Si `x` est une matrice (et *a fortiori* un vecteur ligne ou colonne), l'opération `x.^k` permet de définir la matrice obtenue en élevant chaque coefficient de `x` à la puissance `k`.

(1) Que signifient les instructions suivantes? Comment peut-on interpréter le résultat?

```
-->x=1:10^6; abs(%pi^2/6-sum(x.^(-2)))
 ans  =

    0.0000010
```

(2) On admet qu'il est possible de montrer que, si $p \in [\![1;4]\!]$, il existe des nombres entiers r_p tels que les sommes de Riemann soient de la forme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{\pi^{2p}}{r_p}.$$

Ainsi, $r_1 = 6$. Conjecturer les valeurs de r_2, r_3 et r_4.

Exercice 2. (Séries de Bertrand) On appelle *série de Bertrand* toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

(1) Que peut-on dire de la nature des séries de Bertrand si $\alpha > 1$?

(2) On suppose que $\alpha < 1$. Soit alors γ tel que $\alpha < \gamma < 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\gamma}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} = +\infty.$$

En déduire la nature des séries de Bertrand pour $\alpha < 1$.

(3) Dans toute la suite, on s'intéresse donc aux séries de Bertrand avec $\alpha = 1$. On note

$$S_{n,\beta} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}.$$

(a) Écrire une fonction `Bertrand()` prenant en argument un entier $n \geq 2$ et un réel β et renvoyant $S_{n,\beta}$. On utilisera la fonction `sum()` et des opérations pointées.

(b) Construire les nuages de points $\{(n, S_{n,\beta})\}_{2\leq n\leq 200}$ pour différentes valeurs de β ($\beta < 1$, $\beta = 1$ et $\beta > 1$). Conjecturer alors une condition nécessaire et suffisante sur β pour que la série converge.

Exercice 3. (Inspiré de **EML 2011**). On considère, pour $n \geq 1$, la fonction g_n définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

(1) Représenter simultanément les fonctions g_1, g_2 et g_{10} sur l'intervalle $[0;20]$. Vérifier qu'elles admettent un maximum dont on donnera une valeur approchée.
(2) Déterminer rigoureusement la valeur du maximum M_n de la fonction g_n.
(3) Représenter, dans une autre fenêtre, le nuage de points $\{(n, \sum_{k=1}^{n} M_k)\}_{1\leq n\leq 100}$. Interpréter le résultat.
(4) On pose $\mu_n = \sqrt{n}M_n$. Vérifier avec `SciLab` que la suite (μ_n) converge et donner une valeur approchée à 10^{-3} de sa limite.
(5) Utiliser le résultat de la question précédente pour justifier le résultat observé à la question (3).