
Informatique - T.P n°9

Une stratégie gagnante?

Un fumeur cherche à réduire sa consommation de cigarettes. Au moment où il commence l'expérience, il fume chaque jour avec une probabilité de 0,9. Il décide d'adopter la stratégie suivante: pour savoir s'il va fumer le n -ième jour, il commence par regarder s'il a fumé le $(n - 1)$ -ième jour:

- Si oui, il lance un dé (équilibré, à 10 faces). Si le résultat est supérieur ou égal à 3, il fume;
- Si non, il ne fumera que s'il obtient (avec le même dé) un résultat strictement supérieur à 7.

Le fumeur cherche à savoir quelle sera sa probabilité de fumer à long terme chaque jour et à déterminer l'influence des probabilités de transition choisies.

On note p_n la probabilité de fumer le jour n et $q_n = 1 - p_n$ celle de ne pas fumer. En particulier, $p_0 = 0,9$ et $q_0 = 0,1$.

- (1) Notant $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$, trouver une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
- (2) Écrire alors une fonction SciLab, appelée `fumeur()`, prenant en argument n et renvoyant la probabilité p_n . Représenter le nuage de points $\{(n, p_n)\}_{1 \leq n \leq 365}$. Interpréter le résultat.
- (3) Écrire une nouvelle fonction `fumeur2()` prenant en argument l'entier n mais aussi les probabilités de transition a et b et renvoyant p_n . Faire varier a et b et décrire l'influence de ces variations.
- (4) On pourra montrer (c'est un exercice facile comme tout qu'il est indispensable de savoir faire) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{b}{1 + a - b}.$$

À quoi correspond le script suivant?

```
-->function y=lim(a,b); y=b/(1+b-a); endfunction
-->A=0.01:0.1:0.99; B=A;
-->for i=1:length(A) for j=1:length(B) Z(i,j)=lim(A(i),B(j)); end end
-->plot3d(A,B,Z)
```