ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 1 : Compléments

Parité & Symétries

Définition 1. *Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que I est symétrique par rapport à a, si*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a + x \in I \Longrightarrow a - x \in I.$$

Dans le cas où I est un intervalle et $a \in I$, cela revient à dire que l'intervalle est centré en a.

Par exemple, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, mais c'est aussi le cas de $\mathbb{R}^\star$, tout comme de $]-\pi;\pi[$, mais ce n'est pas le cas de $[-8;+\infty[$.

Définition 2. *Soit f une fonction ayant un domaine de définition symétrique par rapport à 0. On dit que:*

- *f est **paire** si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = f(x)$;*
- *f est **impaire** si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.*

Graphiquement, une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** alors qu'une fonction impaire est quant à elle **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

œ **À retenir.** Lorsqu'on étudie une fonction, si le domaine est symétrique par rapport à 0 (et uniquement dans ce cas, sinon cela n'a pas de sens), on peut chercher une éventuelle parité en calculant $f(-x)$.

Le cas échéant, cela permet de restreindre l'intervalle d'étude ainsi que le nombre de limites à déterminer. On déduit les informations concernant les valeurs négatives **par symétrie**.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition, puis étudier la parité des fonctions suivantes:

(i) $f : x \mapsto x + \ln(1-x) - \ln(x+1)$;
(ii) $g : x \mapsto x\frac{e^x-1}{e^x+1}$;

L'exercice suivant est un classique, dont la résolution est très instructive. On recommande vivement de s'y pencher.

Exercice 2. Montrer que toute fonction f (dont le domaine de définition est symétrique par rapport à 0) peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

On peut généraliser ces propriétés de symétrie de la courbe de f à d'autres axes ou d'autres centres de symétrie. Plus précisément,

Proposition 1. (Axe de symétrie) Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est symétrique par rapport à a. La courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si, pour tout x tel que $a + x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f(a+x) = f(a-x).$$

La propriété précédente est équivalente au fait que la fonction $x \mapsto f(a+x)$ est paire.

Exemple. On considère la fonction f définie par

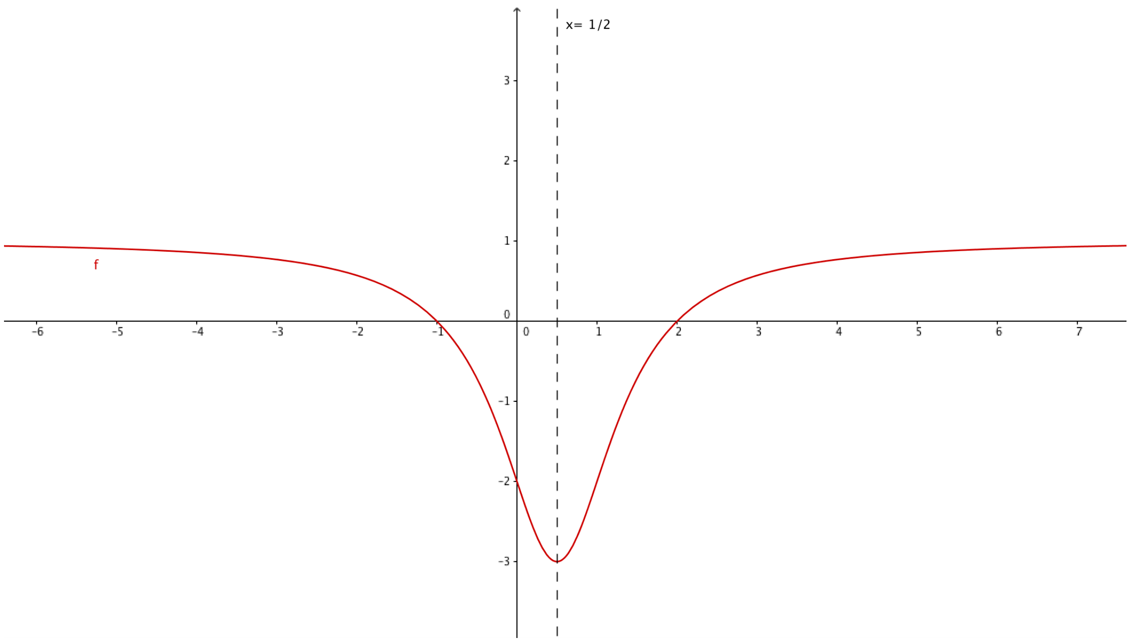
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}.$$

On va montrer que sa courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Une rapide étude du dénominateur nous permet d'établir que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ qui est en particulier symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$. On calcule alors

$$f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{(\frac{1}{2} + x)^2 - (\frac{1}{2} + x) - 2}{(\frac{1}{2} + x)^2 - (\frac{1}{2} + x) + 1} = \frac{\frac{1}{4} + x + x^2 - \frac{1}{2} - x - 2}{\frac{1}{4} + x + x^2 - \frac{1}{2} - x + 1} = \frac{x^2 - \frac{5}{2}}{x^2 + \frac{1}{2}}.$$

On constate alors que la fonction $x \mapsto f\left(\frac{1}{2} + x\right)$ est bien paire (elle ne dépend que de x^2). Ainsi, on a bien la conclusion souhaitée.



Exercice 3. Dans chaque cas, montrer que la courbe représentative de f admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = a$ avec:

(i) $f : x \mapsto x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$ et $a = \frac{1}{2}$;
(ii) $f : x \mapsto \ln|x^2 + x - 2|$ et $a = -\frac{1}{2}$.

Proposition 2. (Centre de symétrie) Soient f une fonction dont l'ensemble de définition est symétrique par rapport à x_I. La courbe de f est symétrique par rapport au point $I(x_I; y_I)$ si, pour tout x tel que $x_I + x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f(x_I + x) = -f(x_I - x) + 2y_I.$$

La propriété précédente est équivalente au fait que la fonction $x \mapsto f(x_I + x) - y_I$ est impaire.

Exemple. On considère la fonction f définie par

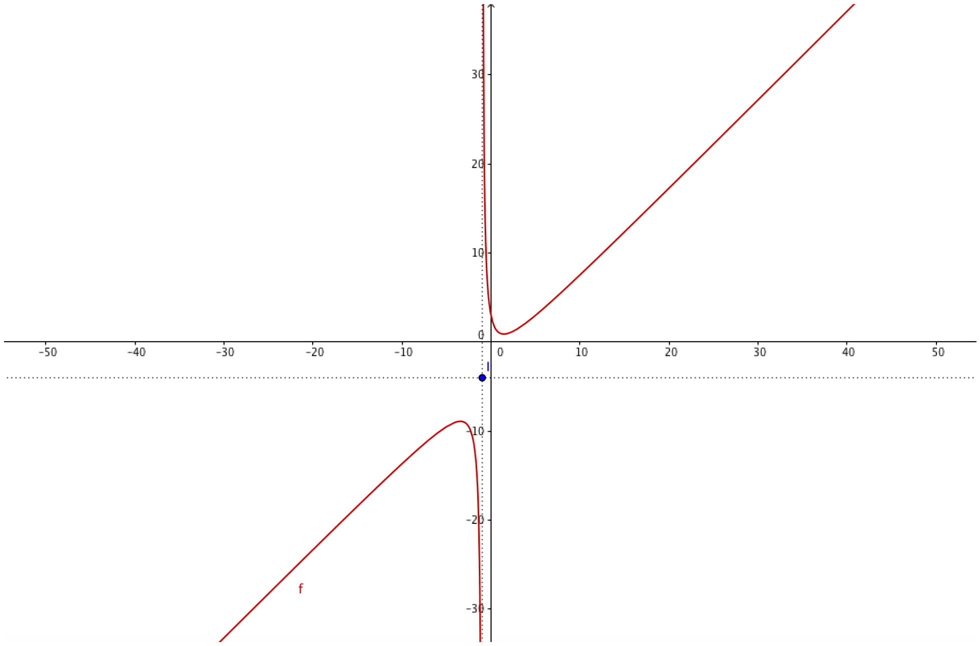
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}.$$

On va montrer que sa courbe est symétrique par rapport au point $I(-1; -4)$.

Ici, l'ensemble de définition est clairement $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ qui est bien symétrique par rapport à -1. On calcule alors (pour $x \neq 0$)

$$f(-1+x) - (-4) = \frac{(-1+x)^2 - 2(-1+x) + 3}{(-1+x) + 1} + 4 = \frac{x^2 - 4x + 6}{x} + \frac{4x}{x} = \frac{x^2 + 6}{x},$$

qui est bien l'expression d'une fonction impaire. On a donc bien la conclusion souhaitée.



Exercice 4. Dans chaque cas, montrer que la courbe représentative de f admet pour centre de symétrie le point J avec:

(i) $f : x \mapsto \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$ et $J(0;1)$;

(ii) $f : x \mapsto \frac{1-2x}{x^2-x-2}$ et $J(\frac{1}{2};0)$.