ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 1. Préliminaires

Ce premier chapitre établit des points de vocabulaire, des notations, certains types de raisonnements et des règles de calculs basiques dont nous aurons besoin tout au long de l'année.

Les éléments qui le composent ont, pour la plupart, déjà été introduits dans le cursus de lycée. Néanmoins, il est capital de s'en assurer une maîtrise totale et rigoureuse afin de pouvoir progresser dans le programme.

De plus, si ce formalisme peut paraître factice (voire rébarbatif) pour des yeux de néophyte, il n'en demeure pas moins nécessaire dès lors que les objets deviennent davantage abstraits et les raisonnements plus longs et élaborés.

1 Notations

Certaines notations sont utilisées en permanence. Afin de lever tout doute qui pourrait subsister, nous les rappelons rapidement.

1.1 Ensembles

Définition 1. *(Notations ensemblistes)*
Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles (ou parties) de E et x un élément de E. On note:

- $x \in A$ *pour signifier que l'élément x appartient à A;*
- $x \notin A$ *pour signifier que l'élément x n'appartient pas à A;*

- $A \subset B$ *pour signifier que A est inclus (contenu) dans B (tout élément de A est donc aussi élément de B);*
- $A \not\subset B$ *pour signifier que A n'est pas inclus dans B;*
- $A \subsetneq B$ *pour signifier que A est inclus strictement dans B;*
- $B \setminus A$ *l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A;*

- $A \cap B$ *l'**intersection** de A et B: il s'agit de l'ensemble composé des éléments communs à A et B;*
- $A \cup B$ *la **réunion** de A et B: il s'agit de l'ensemble composé des éléments qui sont dans A, dans B ou dans les deux;*

- $\emptyset$ *l'ensemble vide (constitué d'aucun élément).*

Lorsque l'intersection de deux ensemble est vide (*i.e.* lorsque $A \cap B = \emptyset$), on dit que les ensembles A et B sont **disjoints**.

On reviendra avec plus de détails sur la théorie des ensembles dans un chapitre futur.

Rappelons également les ensembles de nombres (qui permettent de les classer), déjà rencontrés au lycée.

Définition 2. *(Ensembles de nombres)*

- $\mathbb{N}$ *: ensemble des* ***entiers naturels****.*

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$$

- $\mathbb{Z}$ *: ensemble des* ***entiers relatifs****, c'est à dire des nombres naturels ainsi que de leurs opposés.*

$$\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$$

- $\mathbb{Q}$ *: ensemble des nombres* ***rationnels****. Il s'agit des nombres qui peuvent s'écrire comme quotient d'un entier relatif et d'un entier naturel non nul.*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

- $\mathbb{R}$ *: ensemble des nombres* ***réels****. Il s'agit de tous les nombres rencontrés jusqu'à présent et qui peuvent être représentés, de façon biunivoque, par un point de la droite réelle.*
  Par exemple 3, -30, $\frac{1}{7}$ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; π; e*... sont des réels.*

Tous ces ensembles sont bien sûr des ensembles infinis (ils possèdent une infinité d'éléments). De plus, on a la suite d'inclusions

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Un nombre réel x qui n'est pas dans $\mathbb{Q}$ (ce qui se note $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) est appelé nombre *irrationnel*. On peut montrer par exemple que $\sqrt{2}$ est irrationnel (voir Exercice 10 ci-après).

Enfin, il peut être important de considérer les ensembles précédents ponctionnés de 0. Pour alléger les notations, on note ces ensembles à l'aide d'une étoile placée en exposant. Par exemple, $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On ne revient pas sur la notion d'intervalle qu'il est cependant nécessaire de maîtriser parfaitement.

1.2 Notion d'application

Tout comme mentionné ci-dessus à propos de la théorie des ensembles, la définition suivante (et des propriétés qui en découlent) sera reprise dans un chapitre ultérieur.

Définition 3. *(Notion d'application)*
Une ***application*** f *est la donnée d'un ensemble* E*, appelé* ***ensemble de départ****, d'un ensemble* F*, appelé* ***ensemble d'arrivée****, et pour chaque élément* x *de* E*, d'un unique élément noté* $f(x)$*.*

On dit que $f(x)$ *est l'****image*** *de* x *par* f*. De plus, si* y *est un élément de* F *et que* x *est un élément de* E *qui vérifie* $f(x) = y$*, alors* x *est appelé* ***antécédent*** *de* y *par* f*.*
Une application f *de* E *dans* F *se note ainsi:*

$$f : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

Lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont des intervalles de $\mathbb{R}$, une application est plutôt appelée une *fonction*.

1.3 Quantificateurs

Définition 4. *(Quantificateurs universel et existentiel)*

- *Le symbole $\forall$ signifie "**quel que soit**" ou "pour tout".*
  Par exemple $\forall x \in \mathbb{R}$ signifie "pour tout nombre réel x".

- *Le symbole $\exists$ signifie "**il existe** (au moins un)..." ou "on peut trouver (au moins un)".*
  Par exemple, $\exists x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}$ signifie qu'il existe un nombre réel x qui n'est pas un rationnel. On sait que c'est vrai (il y a par exemple $\sqrt{2}$, π ou e...), il y en d'ailleurs une infinité donc au moins un.

⚠ **Attention .** Ces symboles servent à formuler de façon précise des énoncés mathématiques. Il ne doivent être en aucun cas utilisés à des fins d'abréviation.

2 Rudiments de logique

2.1 Propositions. Implications. Équivalence

Définition 5. *Une proposition (ou assertion) est un énoncé qui ne peut être que vrai ou faux.*

Par exemple, "l'entier n est pair" ou "$2+2=4$" sont des propositions. Si la seconde proposition est bien tout le temps vraie, la vérité de la première dépend de la variable n. Pour certaines valeurs de n, elle sera vraie, et pour d'autres, elle sera fausse (mais jamais les deux en même temps).

Lorsqu'on fait de la logique, on note souvent les propositions P ou Q, adoptant la convention que "Supposons P" est en fait une abréviation de "Supposons que P est vraie".

Deux propositions qui sont simultanément vraies ou simultanément fausse ne sont pas les mêmes; on dira qu'elles sont *équivalentes*. Nous y reviendrons dans quelques paragraphes.

Définition 6. *Soit P une proposition. On appelle **négation** de P, et on note "non P" ou $\neg P$, qui est vraie si et seulement si P est fausse.*

Par exemple, si P est la proposition "le nombre x est strictement négatif" et Q la proposition "l'équation (E) a des solutions", la négation de P sera $\neg P$: "le nombre x est positif ou nul" et celle de Q sera $\neg Q$: "l'équation (E) n'a aucune solution".

Définition 7. *Soient P et Q deux propositions. La proposition "P **et** Q", notée $P \wedge Q$, est la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont vraies simultanément. On l'appelle aussi conjonction des propositions P et Q.*

Définition 8. *Soient P et Q deux propositions. La proposition "P **ou** Q", notée $P \vee Q$, est la proposition qui est fausse si et seulement si P et Q sont fausses simultanément. On l'appelle aussi disjonction des propositions P et Q.*

Exercice 1. (*) Ecrire, en fonction de P et Q, les *tables de vérité* des propositions $\neg P$, $P \wedge Q$ et $P \vee Q$.

Définition 9. *Soient P et Q deux propositions. On appelle **implication** de Q par P, et on note "$P \Rightarrow Q$", l'assertion "$\neg P \vee Q$": elle est donc fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse. Lorsque "$P \Rightarrow Q$" est vraie, on dit que P implique (ou entraîne) Q.*

Pour montrer que la proposition "$P \Rightarrow Q$" est vraie, on peut commencer par supposer que P est vraie et montrer qu'alors Q l'est aussi.L'implication "$P \Rightarrow Q$" peut se reformuler indifféremment:

- Si P, alors Q
- Si $\neg Q$ alors $\neg P$
- Pour que Q, il **suffit** que P

- P est une **condition suffisante** pour que Q
- Pour que P, il **faut** que Q
- Q est une **condition nécessaire** pour que P

Exemple. Si A et B sont deux ensembles, montrer que $A \subset B$ revient à montrer que $x \in A$ implique $x \in B$.

Définition 10. *Soient P et Q deux propositions. On appelle* ***équivalence*** *entre P et Q, et on note "$P \Leftrightarrow Q$", l'assertion qui est vraie si et seulement si P et Q sont simultanément vraies ou fausses (c'est à dire équivalentes).*

L'équivalence "$P \Leftrightarrow Q$" peut se reformuler indifféremment:

- P si et seulement si Q
- Pour que Q, il **faut et il suffit** que P
- P est une **condition nécessaire et suffisante** pour que Q

Pour montrer que "$P \Leftrightarrow Q$" est vraie, on peut montrer que les deux propositions "$P \Rightarrow Q$" **et** "$Q \Rightarrow P$" sont vraies. On dit qu'on procède par *double implication.*

Définition 11. *Soient P et Q deux propositions. La proposition "$Q \Rightarrow P$" est appelée la* ***réciproque*** *de la proposition "$P \Rightarrow Q$".*

Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et que sa réciproque l'est aussi, alors P et Q sont équivalentes.

Définition 12. *Soient P et Q deux propositions. La proposition "$\neg Q \Rightarrow \neg P$" est appelée* ***contraposée*** *de la proposition "$P \Rightarrow Q$".*

Exercice 2. Montrer qu'une implication et sa contraposée sont toujours équivalentes.

⚠ **Attention .** Si une implication est toujours équivalente à sa contraposée, elle n'est pas équivalente à sa réciproque.

2.2 Logique et quantificateurs

La véracité d'une proposition peut dépendre d'un ou plusieurs paramètres. On note d'ailleurs parfois $P(x)$ au lieu de P une proposition dont l'expression dépend du paramètre x.
Ces paramètres peuvent être "quantifiés" de manière implicite (ou pas).

Par exemple "tout entier naturel est également un rationnel" peut s'écrire à l'aide des quantificateurs:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Q}.$$

On observe d'ailleurs que la variable n choisie ici est *muette*; on aurait pu la remplacer par n'importe quelle autre lettre.

Autre exemple, "tout nombre réel admet un nombre qui lui est supérieur" peut s'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \leq y.$$

⚠ **Attention .** Il est très important de constater (et de comprendre) que l'*ordre* des quantificateurs est capital et ne peut *a priori* pas être modifié sous peine de changer le sens (et la véracité) de la proposition.

En effet, dans l'exemple précédent, une inversion des quantificateurs donnerait

$$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leq y,$$

ce qui voudrait dire "tout nombre réel est borné" et ce qui est faux car l'ensemble est infini (alors que la proposition précédente était, elle, vraie).

Plus précisément, dans la première proposition, le y dépend du x (qui lui est arbitraire) et peut donc (éventuellement) varier suivant la valeur de celui-ci.

Dans la proposition avec les quantificateurs inversés, on aurait trouvé un y qui conviendrait pour tous les x, ce qui n'est bien sûr pas possible ici.

Il est donc bien important de comprendre cette différence qui pourrait paraître subtile mais qui en fait, ne l'est pas.

Exercice 3. Écrire, à l'aide des quantificateurs, la proposition suivante: "entre deux nombre réels, il y a toujours un nombre rationnel". Que dire de la proposition avec les quantificateurs inversés?

On peut en revanche inverser deux quantificateurs successifs lors que ce sont les mêmes. On dit que deux quantificateurs $\forall$ successifs commutent (et il en est de même pour deux quantificateurs $\exists$ successifs).

La négation d'une proposition avec quantificateurs provoque un changement des quantificateurs. Plus précisément, si $P(x)$ est une proposition qui dépend d'un paramètre x appartenant à un ensemble E, alors on a:

$$\neg\left(\forall x \in E, P(x)\right) \Leftrightarrow \left(\exists x \in E, \neg P(x)\right)$$

Nier que quelquechose a lieu pour tout élément x équivaut à dire qu'il y a (au moins) un x pour lequel cela n'a pas lieu.

On a également:

$$\neg\left(\exists x \in E, P(x)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in E, \neg P(x)\right)$$

Nier qu'il existe un élément x pour lequel quelquechose se passe équivaut à dire que quelque soit l'élément x, cela ne se passe pas.

Exemple. La négation de la proposition "tous les habitants de Vienne parlent allemand" est bien "il existe (au moins) un habitant de Vienne qui ne parle pas allemand".

Exercice 4. (*) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs puis nier (toujours avec les quantificateurs) les assertions suivantes:

(1) f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$;
(2) f est strictement positive sur $\mathbb{R}$;
(3) f n'est pas la fonction nulle.

2.3 Exemples de raisonnements

Les observations précédentes permettent déjà d'établir certains types de raisonnements.

La première idée de raisonnement à laquelle on pense, est celle du *raisonnement direct*; pour montrer que P implique Q, on suppose que P est vraie et on montre que par conséquent Q aussi.

Exercice 5. Soit n en nombre pair. Montrer que n^2 est encore pair.

Pour montrer la véracité d'une proposition du type "$\exists x,\ P(x)$" il suffit de donner un exemple d'un x qui fonctionne (notons que ce n'est pas toujours possible; l'existence est parfois assurée par des preuves non constructives et on ne connait pas toujours explicitement de x qui convienne. On verra un exemple de ce genre de situation avec le *Théorème des valeurs intermédiaires* dans un chapitre ultérieur).

En passant à la négation, pour démontrer une proposition du type "$\forall x,\ P(x)$" est fausse, on peut donc trouver un x qui ne satisfait pas la proposition $P(x)$. Cela s'appelle **fournir un contre-exemple**.

Exercice 6. Montrer que l'assertion suivante est fausse: "toute fonction croissante est positive sur son ensemble de définition".

Parfois, montrer directement une implication n'est pas facile. On essaie donc de prendre le problème différemment.

Définition 13. ***Raisonner par contraposée*** *signifie que pour montrer qu'une implication "$P \Rightarrow Q$" est vraie, on montre que c'est sa contraposée "$\neg Q \Rightarrow \neg P$" qui est vraie.*

Exercice 7. (*) Montrer que n pair est équivalent à n^2 pair.

Exercice 8. Soient x et y deux nombres réels différents de 1. Montrer que $x \neq y \Rightarrow \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$.

Définition 14. ***Raisonner par disjonction des cas*** *signifie que pour montrer qu'une proposition R est vraie, on exhibe deux propositions P et Q telles que "$P \vee Q$", "$P \Rightarrow R$" et "$Q \Rightarrow R$" soient toutes trois vraies.*

En d'autres termes, il s'agit d'expliciter deux alternatives (qu'on a forcément) et qui chacune entraîne la proposition R.

Exercice 9. Montrer que, pour tout nombre entier n, $n^2 + n$ est pair.

Définition 15. *Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on peut* ***raisonner par l'absurde****. La démarche consiste à montrer que la négation de P mène à une contradiction logique.*

Exercice 10. (*) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

⚠ **Attention .** Il y a une différence (peut-être parfois subtile) entre le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par contraposée. On s'en convaincra par exemple avec l'exercice suivant.

Exercice 11. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est encore un irrationnel.

Il existe d'autre types de raisonnement (notamment *par récurrence*) que nous présenterons un peu plus tard.

3 Calculs de base

3.1 Puissances entières d'un nombre réel

- Soient $x \in \mathbb{R}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit les *puissances* de x par
$$x^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad x^n = x \times x \times x \times ... \times x \qquad (n \text{ fois}),\ n \geq 1$$
- $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 0^n = 0.$
- Soient $x \in \mathbb{R}^\star$ et $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ($-n$ est donc un entier naturel non nul). On pose
$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}$$
Par exemple, $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$.

Il découle immédiatement de ces définitions les règles de calcul suivantes, déjà bien connues.

Proposition 1. (Règles de calcul) Pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$ et tous $a, b \in \mathbb{R}^\star$, on a
$$a^n \times a^m = a^{n+m}; \qquad (a \times b)^n = a^n \times b^n; \qquad (a^n)^m = a^{n \times m}$$
$$a^0 = 1; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

On remarquera en particulier que

- $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 0^n = 0;$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad 1^n = 1;$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1.$

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression suivante

$$-\frac{(-12)^{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{9^n 8^n}.$$

Les formules suivantes sont à connaître sans la moindre hésitation.

Proposition 2. (Identités remarquables) Soient a, b et c trois nombres réels.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3; \qquad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3; \qquad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

Exercice 13. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Quelle est la formule de l'"identité remarquable" $(a+b+c)^2$?

3.2 Logarithme néperien

On admet l'existence du logarithme népérien, défini sur $\mathbb{R}_+^\star$:

$$\ln : \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{cases}$$

Proposition 3. (Propriétés remarquables du logarithme)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad \begin{array}{ll} \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) & \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b) \\ \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a) & \ln(a^n) = n\ln(a), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \ln(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1 & \ln(a) = 1 \Leftrightarrow a = e \\ \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b & \ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b \end{array}$$

3.3 Exponentielle

On admet l'existence de la fonction exponentielle, définie sur $\mathbb{R}$:

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^\star \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{cases}$$

Il arrive qu'on note e^x au lieu de $\exp(x)$.

Proposition 4. (Propriétés remarquables de l'exponentielle)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad \begin{array}{ll} \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) & \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \\ \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} & \exp(na) = (\exp(a))^n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \exp(a) = 1 \Leftrightarrow a = 0 & \\ \exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b & \exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow a < b \end{array}$$

Proposition 5. (Lien entre exponentielle et logarithme)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad (e^x = y) \Leftrightarrow (x = \ln(y))$$

En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad e^{\ln(x)} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x$$

3.4 Puissances réelles d'un nombre strictement positif

Les deux fonctions précédentes permettent d'*étendre* la notion de puissance à un exposant réel (pour un argument strictement positif). Plus précisément:

Définition 16. *(Puissances réelles d'un nombre strictement positif)*
Soient $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

Les propriétés listées au paragraphe précédent permettent de voir que toutes les règles de calcul de la Proposition 1 s'étendent bien aux puissances réelles d'un nombre strictement positif.

Proposition 6. (Règles de calcul étendues)
Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, on a

$$x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}; \qquad (x \times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha; \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\times\beta}$$
$$x^0 = 1; \qquad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}; \qquad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$$

Lorsque $\alpha = 1/2$, on note plutôt

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

il s'agit de la **racine carée** de x; l'unique nombre positif dont le carré vaut x.

On rappelle qu'il faut savoir simplifier les écritures de racines carrées. Plus précisément, pour simplifier $\sqrt{x}$, on décompose x comme produit de puissances de nombres les plus petits possibles et on utilise alors les propriétés des puissances pour "faire sortir de la racine" ce qu'on peut.

Exemple.

$$\sqrt{200} = \sqrt{8 \times 25} = \sqrt{2^3 \times 5^2} = \sqrt{2^3} \times \sqrt{5^2} = 2\sqrt{2} \times 5 = 10\sqrt{2}.$$

⚠ **Attention** . Si pour tout nombre réel positif x on a bien $x = \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$, il faut faire attention lors de la simplification de $\sqrt{x^2}$ si on ne connait pas le signe de x.

En effet, pour tout x réel, x^2 est positif et on peut donc calculer la racine carrée en gardant bien à l'esprit que le résultat doit être positif.
Par exemple $\sqrt{(-2)^2} = 2$.

De façon générale, on a, pour tout x réel, $\sqrt{x^2} = |x|$, où $|x|$ dénote la *valeur absolue* de x, dont nous rappelons la définition ci-après.

3.5 Valeur absolue

Définition 17. *La* ***valeur absolue*** *d'un nombre réel x est définie par*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

La fonction valeur absolue, $x \mapsto |x|$, est alors définie sur $\mathbb{R}$.

En particulier, la valeur absolue d'un nombre réel est **toujours positive**, ce qui s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0.$$

Proposition 7. (Propriétés immédiates de la valeur absolue)
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,

$$|-x| = |x|; \qquad |x \times y| = |x| \times |y|; \qquad |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \text{si } y \neq 0.$$

De plus, $(|x| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$. Enfin $|x - y|$ peut être interprété comme la distance de x à y sur la droite réelle.

Exercice 14. Oter le symbole valeur absolue de l'expression suivante
$$g(x) = 2|x+1| - |1-2x|.$$

Proposition 8. (Propriété essentielle de la valeur absolue)
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Alors,
$$|x| \leq \epsilon \Longleftrightarrow -\epsilon \leq x \leq \epsilon.$$

On en déduit la propriété suivante, outil essentiel en analyse.

Proposition 9. (*)(**Inégalité Triangulaire**) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,
$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$
De plus, l'égalité est caractérisée:
$$|x+y| = |x| + |y| \Longleftrightarrow xy \geq 0$$

(On aura donc remarqué qu'il n'y a pas égalité *en général.*)

Exercice 15. À partir de l'inégalité triangulaire, montrer que si x, y, z sont trois réels quelconques, alors $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$.

La valeur absolue permet de formuler quelques égalités très utiles.

Proposition 10. (Utilisation de la valeur absolue) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) Si $xy > 0$, alors
$$\ln(xy) = \ln(|x|) + \ln(|y|) \qquad \text{et} \qquad \ln(\frac{x}{y}) = \ln(|x|) - \ln(|y|).$$

(2) En particulier, si $x \neq 0$
$$\ln(x^2) = 2\ln(|x|).$$

(3) Si $xy > 0$, alors
$$\sqrt{xy} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|y|}}.$$

(4) (Relation fondamentale de la racine carrée)
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{x^2} = |x|.$$

3.6 Partie Entière

Définition 18. *Soit x un nombre réel quelconque. La* ***partie entière*** *de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier n tel que*
$$n \leq x < n+1.$$
On a donc naturellement l'encadrement
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Par exemple, $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, etc...
Une définition équivalente de la partie entière de x est le plus grand entier n tel que $n \leq x$, ce qui s'écrit $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leq x\}$. (Il suit également que $\lfloor x \rfloor + 1 = \min\{n \in \mathbb{Z} : \ n > x\}$.)

Il est important de ne pas confondre la partie entière d'un nombre avec la troncature à l'unité de ce nombre (qui consiste à supprimer les décimales). Les deux notions diffèrent pour les nombres négatifs.

La fonction partie entière, définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est un cas particulier de fonction **en escalier**. Elle présente notamment des points de discontinuité sur toutes les valeurs entières.

Exercice 16. Soit $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$?

4 Équations

On commence par rappeler la règle cruciale suivante:
Un produit est nul si et seulement si (au moins) un de ses facteurs est nul.

On rappelle ensuite les règles de calcul au sein d'une équation. On ne change pas une égalité en:
- ajoutant (ou soustrayant) un même réel aux membres de gauche et de droite;
- multipliant (ou divisant) les deux membres par un même réel **non nul**;
- prenant l'inverse des deux membres (**s'ils sont tous deux non nuls**);
- composant les deux membres par l'exponentielle;
- composant les deux membres par le logarithme (**s'ils sont tous deux strictement positifs**);
- élevant les deux membres à une puissance **impaire**.

⚠ **Attention .** Le passage au carré ou à la racine carrée sont un peu plus délicats.
L'équation $x^2 = a$ n'a de sens que si $a \geq 0$ et a alors deux solutions ($-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$).
L'équation $\sqrt{x} = b$ n'a de sens que si $x \geq 0$ et $b \geq 0$. Auquel cas, il y a une seule solution qui est b^2.

De manière générale, avant de résoudre une équation, il faut chercher son **domaine de définition**; c'est à dire l'ensemble des valeurs de l' (des) inconnue(s) pour lesquelles l'équation a un sens.

Par ailleurs, on essaiera toujours de se ramener à une équation factorisée (à l'aide des identités remarquables par exemple) et dont le second membre vaut 0.

Par exemple,

$$x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}.$$

Cette méthode permet notamment de justifier de la discussion et de la résolution des équations du second degré.

Proposition 11. (Équations du second degré)
Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$(E) \qquad ax^2 + bx + c = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On introduit le *discriminant*, défini par $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue alors trois cas:

(i) Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'a aucune solution;

(ii) Si $\Delta = 0$, l'équation (E) se factorise:

$$(E) \Longleftrightarrow a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$$

et admet donc pour unique solution $x = -\frac{b}{2a}$;

(iii) Si $\Delta > 0$, l'équation (E) se factorise

$$(E) \Longleftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ sont donc les deux solutions de l'équation.

Tout cela se combine pour la résolution d'équations diverses.

Exemple. Résolution de $\sqrt{2x + 7} = -2 - x$.
L'équation n'a de sens que si à la fois $2x + 7 \geq 0$ (ce qui équivaut à $x \geq -\frac{7}{2}$ - voir le rappel des règles pour les inéquations ci-après) et si $-2 - x \geq 0$ (soit $x \leq -2$). Au final, la contrainte imposée par l'ensemble de définition de cette équation est donc $x \in [-\frac{7}{2}; -2]$. On peut donc écrire

$$\sqrt{2x+7} = -2-x \iff \begin{cases} x \in [-\frac{7}{2};-2] \\ 2x+7 = (-2-x)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in [-\frac{7}{2};-2] \\ x^2+2x-3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in [-\frac{7}{2};-2] \\ x = 1 \text{ ou } x = -3 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x+7} = -2-x \iff x = -3.$$

Le résultat suivant a déjà été vu au lycée dans le cadre des *Polynômes*; on y reviendra d'ailleurs dans une section d'un chapitre ultérieur qui leur sera consacrée.

Théorème 1. *(Principe d'identification)*
Soient n, p deux entiers naturels non nuls, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ et $b_0, b_1, \cdots, b_p$ des réels et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$.

Les assertions suivantes sont équivalentes:
(i) $\forall x \in [\alpha;\beta], \quad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_0$;
(ii)

$$(n = p) \text{ et } \begin{cases} a_0 &= b_0 \\ a_1 &= b_1 \\ &\vdots \\ a_n &= b_n \end{cases}.$$

Exercice 17. (*)
Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = x.$$

5 Inéquations

On rappelle les règles de calcul au sein d'une inéquation. On ne change pas le signe d'une inégalité en:

- ajoutant (ou soustrayant) un même réel aux membres de gauche et de droite;
- multipliant (ou divisant) les deux membres par un même réel **strictement positif**;
- composant les deux membres par l'exponentielle;
- composant les deux membres par le logarithme (**s'ils sont tous deux strictement positifs**);
- élevant les deux membres à une puissance **impaire**.

On change le signe d'une inégalité en:

- multipliant (ou divisant) les deux membres par un même réel **strictement négatif**;
- prenant l'inverse des deux membres (**s'ils sont tous deux non nuls et de même signe**).

⚠ **<u>Attention</u> .** Comme dans le cadre des égalités, le passage au carré (ou à la racine carré) demeure délicat. Il faut évidemment faire attention au domaine de définition. Tout comme dans le cadre des égalités, on essaiera de se ramener à une inégalité factorisée et on utilisera un tableau de signes.

Exemple.

$$x^2 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{3})^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \geq 0$$

et on résout à l'aide du tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, on peut lire l'ensemble des solutions de l'inéquation dans la dernière ligne du tableau

$$x^2 \geq 3 \iff x \in]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[.$$

La factorisation établie à la Proposition 11 permet, à l'aide d'un tableau de signes de résoudre des inéquations du second degré. Plus précisément, on rappelle la chose suivante.

Proposition 12. (Inéquations du second degré)
Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. On s'intéresse au signe de l'expression

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On distingue trois cas, en fonction de la valeur du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

(i) Si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ ne se factorise pas; il est de signe constant et ce signe est celui de a;

(ii) Si $\Delta = 0$, alors $P(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$; on a donc le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

(iii) Si $\Delta > 0$, alors $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (où on a noté x_1 et x_2 les deux solutions de $P(x) = 0$ avec $x_1 < x_2$); on a donc le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

6 Outils des études de fonctions

La résolution de différents types de problèmes dans lesquelles des expressions algébriques apparaissent peut nécessiter l'utilisation d'arguments liés à l'étude de fonction. On en rappelle donc ici les étapes.

Pour étudier une fonction f on effectue les actions suivantes:

- On détermine l'*ensemble de définition* $\mathcal{D}_f$ (c'est à dire l'ensemble des réels pour lesquels la fonction est bien définie et son expression algébrique $f(x)$ a bien un sens);
- On peut essayer de simplifier l'étude (en restreignant l'ensemble sur lequel on étudie la fonction) en cherchant une éventuelle *parité* (paire ou impaire);
- On détermine les *limites* de f au bord de son ensemble de définition;
- On étudie la *dérivabilité* de f, on calcule cette dérivée lorsque c'est possible;
- À l'aide du signe de la dérivée, on dresse le tableau de variations de f;
- On trace la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (on peut s'aider en plaçant des tangentes particulières ou asymptotes si il y en a).

On rappelle les méthodes (et règles de calcul) pour certaines de ces étapes.

6.1 Limites

Il est important de connaître le comportement de la fonction étudiée au bord de le son ensemble de définition. Voici donc quelques limites de fonctions usuelles:

- **Fonctions affines** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$ (où $a, b, \in \mathbb{R},\ a \neq 0$)

$$\lim_{x\to-\infty} ax + b = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad a < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} ax + b = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

- **Fonction valeur absolue** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$

$$\lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} |x| = +\infty$$

- **Fonction carrée** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

- Généralisation: **fonctions polynômes** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ (où $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n \in \mathbb{R}$ avec $a_n \neq 0$). On discute alors suivant la parité de n.
  - si n est pair

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

  - si n est impair

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

- **Fonction inverse** $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^- \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

- **Fonction logarithme** $\ln : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

- **Fonction exponentielle** $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star,\ x \mapsto \exp(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

- **Fonctions puissances** $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}^\star$)

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0^+ & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ 0^+ & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Naturellement, toutes les fonctions précédentes sont *continues* sur les intervalles qui forment leurs ensembles de définition; en particulier, si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, alors $\lim_{x\to x_0} = f(x_0)$.

La connaissance des limites de ces fonctions en un même endroit permet d'obtenir, par combinaisons, d'autres limites. On rappelle donc les règles de calcul, *i.e.* l'**algèbre des limites**. (Parfois, le résultat est une forme indéterminée qui ne peut pas être prévue à l'avance et nécessite donc davantage de travail; ce cas de figure sera représenté par un "?").

Soient f et g deux fonctions, x_0 une valeur à l'intérieur ou au bord de l'intersection des deux ensembles de définition et $l,\ l' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ telles que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = l'.$$

- **Somme**: $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$

l \ l'	$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$l \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$l+l'$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

- **Produit**: $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$

l \ l'	$-\infty$	$l'<0$	0	$l'>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$l<0$	$+\infty$	$l \times l'$	0	$l \times l'$	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$l>0$	$-\infty$	$l \times l'$	0	$l \times l'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

- **Quotient**: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

l \ l'	$-\infty$	$l'<0$	0^-	0^+	$l'>0$	$+\infty$
$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$l<0$	0^+	l/l'	$+\infty$	$-\infty$	l/l'	0^-
0^-	0^+	0	0	0	0	0^-
0^+	0^-	0	0	0	0	0^+
$l>0$	0^-	l/l'	$-\infty$	$+\infty$	l/l'	0^+
$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

- Cas particulier: **Inverse**: $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}$

l	$-\infty$	$l<0$	0^-	0^+	$l>0$	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}$	0^-	$1/l$	$-\infty$	$+\infty$	$1/l$	0^+

Certaines formes indéterminées sont cependant connues et bien utiles. C'est le cas de celles rappelées dans la proposition suivante.

Proposition 13. (Croissances comparées) Soit $\alpha > 0$. Alors,

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0 \qquad \text{et } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

et

$$\lim_{x\to -\infty} x^\alpha \exp(x) = 0 \qquad \text{et } \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty$$

Pour résumer, n'importe quelle puissance (positive) de x l'emporte sur le logarithme alors qu'*a contrario*, l'exponentielle l'emporte sur n'importe quelle puissance de x.

Graphiquement, certaines limites peuvent se traduire par la présence d'**asymptotes**.

En effet, si une fonction f a une limite finie en $\pm\infty$ (*i.e.* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$), sa courbe représentative admettra une asymptote horizontale $y = a$ en $\pm\infty$.

Si en revanche, il y a une limite infinie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ au bord de l'ensemble de définition (*i.e.* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$), la courbe représentative admettra cette fois une asymptote verticale, d'équation $x = x_0$.

Enfin, plus généralement, s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$, alors la courbe représentative de f admettra, en $\pm\infty$, une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$.

On détermine a et b à l'aide des formules suivantes:

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{et} \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax.$$

On détermine la position relative de la courbe par rapport à une éventuelle asymptote en étudiant le signe de la différence des deux expressions correspondantes.

Quand la courbe semble *regarder* dans une direction mais tout en s'en éloignant, on dit que la courbe possède une branche parabolique dont l'axe est donné par la direction que regarde la courbe. Plus précisément,

Définition 19. *On dit que la courbe représentative de f possède une* ***branche parabolique*** *en $+\infty$ de direction $y = ax$ (avec $a \neq 0$) si*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \textbf{\textit{et}} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty.$$

Si la limite de $f(x) - ax$ est plus l'infini, la courbe regarde l'axe par au-dessus, si la limite est moins l'infini, la courbe regarde l'axe par en dessous.

Naturellement, on peut adapter la définition pour des branches paraboliques en $-\infty$.

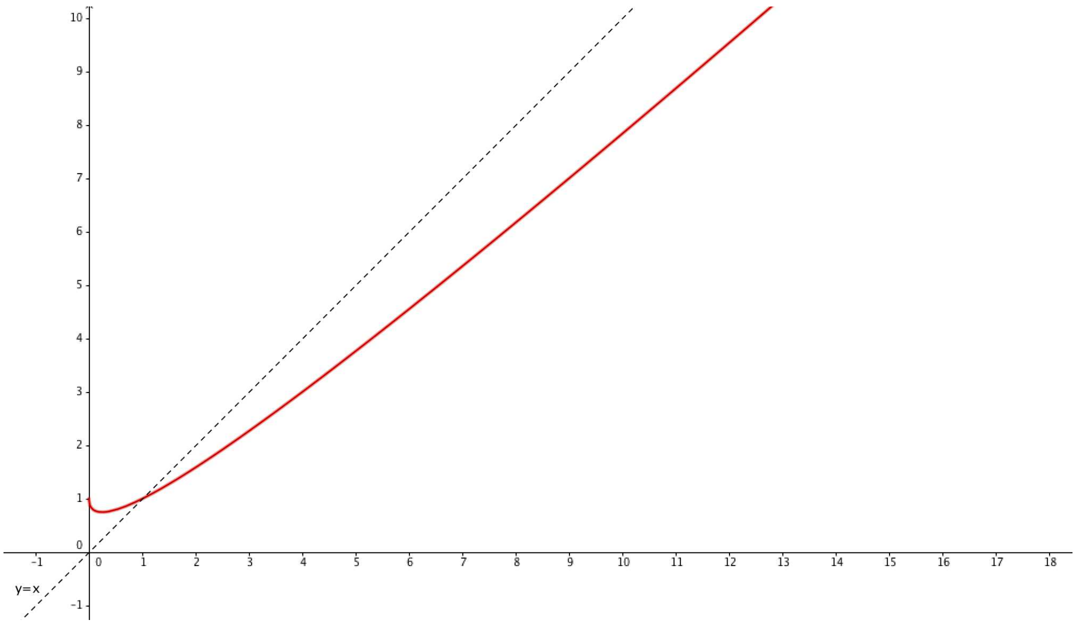
Remarque. Si, en revanche, la limite en l'infini du rapport $\frac{f(x)}{x}$ est 0, on dit que la courbe possède une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (Ox) (c'est le cas en particulier du logarithme).

Enfin, si ce même rapport tend vers l'infini, on dit que la courbe possèble une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (Oy) (ce qui est le cas de l'exponentielle).

Exemple. Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \sqrt{x}$. Un rapide calcul de limite montre que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) - x = +\infty.$$

On conclut donc que la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction $y = x$ qu'elle *regarde* par au-dessus.



6.2 Dérivées

Une fonction f est dite *dérivable* en un point x_0 de son ensemble de définition si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. Auquel cas, cette limite est appelé *nombre dérivé* et noté $f'(x_0)$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée *dérivée* de f.

Si f est dérivable en x_0, alors la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse x_0 dont l'équation est

$$T_{x_0}: \qquad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x0).$$

Voici quelques fonctions usuelles dont la dérivabilité ainsi que l'expression de la dérivée est rappelée.

- **Fonctions affines**

$$f : x \mapsto ax + b \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a;$$

- **Fonction valeur absolue**

$$f : x \mapsto |x| \text{ est dérivable sur }]-\infty; 0[\text{ et sur }]0; +\infty[, \text{et } f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- **Fonction carrée**

$$f : x \mapsto x^2 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x;$$

- **Fonction inverse**

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^\star, \text{et } \forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f'(x) = -\frac{1}{x^2};$$

- **Fonction logarithme**

$$f : x \mapsto \ln(x) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^\star, \text{et } \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f'(x) = \frac{1}{x};$$

- **Fonction exponentielle**

$$f : x \mapsto \exp(x) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \exp(x);$$

- **Fonction puissance**

$$f : x \mapsto x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^\star, \text{et } \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1};$$

- Cas particulier: **fonction Racine carrée**

$$f : x \mapsto \sqrt{x} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^\star, \text{et } \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On présente, sous forme d'un tableau, les règles de calcul concernant les opérations sur les dérivées (somme, produit, quotient, composition, ...).

Soient f et g deux fonctions dérivables sur leurs domaines de définition $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

Fonction	Dérivée	Domaine de validité
$\lambda \times f\ (\lambda \in \mathbb{R})$	$\lambda \times f'$	$\mathcal{D}_f$
$f+g$	$f'+g'$	$\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	$\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$	$\{x \in \mathcal{D}_f :\ f(x) \neq 0\}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$\mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_g :\ g(x) \neq 0\}$
$g \circ f$	$(g' \circ f) \times f'$	$\{x \in \mathcal{D}_f :\ f(x) \in \mathcal{D}_g\}$
$f^n\ (n \in \mathbb{N})$	$n \times f' \times f^{n-1}$	$\mathcal{D}_f$
$\frac{1}{f^n}\ (n \in \mathbb{N})$	$-\frac{n \times f'}{f^{n+1}}$	$\{x \in \mathcal{D}_f :\ f(x) \neq 0\}$
$f^\alpha\ (\alpha > 0)$	$\alpha \times f' \times f^{\alpha-1}$	$\{x \in \mathcal{D}_f :\ f(x) > 0\}$
e^f	$f' \times e^f$	$\mathcal{D}_f$
$\ln(f)$	$\frac{f'}{f}$	$\{x \in \mathcal{D}_f :\ f(x) > 0\}$

Exemple. Étudions la fonction définie par $f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x-1}$.

Concernant l'ensemble de définition, il faut trouver à la fois les valeurs de x pour lesquelles le logarithme est définie (c'est à dire $x+1>0$) et pour lesquelles le dénominateur ne s'annule pas ($x-1 \neq 0$).
On combine facilement ces deux conditions pour obtenir que $\mathcal{D}_f =]-1;1[\cup]1;+\infty[$. Il n'y aucune parité ici et on ne peut donc pas restreindre l'intervalle d'étude.

Les opérations sur les limites nous permettent de déterminer le comportement de f au bord de son intervalle de définition:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

D'autre part, la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition comme combinaisons de fonctions usuelles. Le calcul de la dérivée donne

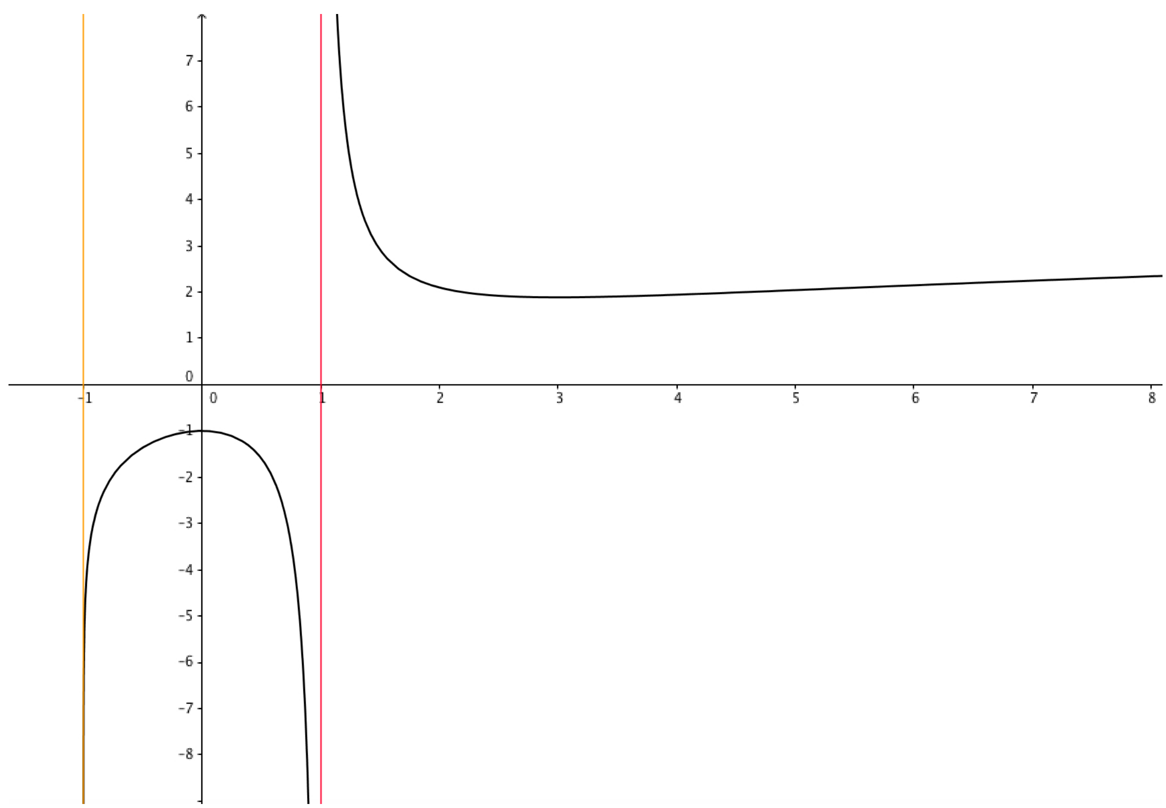
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2}, \qquad x \in \mathcal{D}_f.$$

On peut donc facilement déterminer le signe de cette dérivée et dresser le tableau de variations de f:

x	-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖		-1		‖ $+\infty$				$+\infty$
	‖	$-\infty$ $\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	‖	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	

On peut également s'intéresser à la banche infinie de la courbe de f. On calcule la limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$. On a
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}+\frac{1}{x(x-1)}=0.$$
On peut donc en conclure que la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (Ox) qu'elle regarde par au-dessus ($f(x)$ reste positif quand $x\to+\infty$).

Toutes les informations précédentes permettent enfin de tracer l'allure de la courbe représentative de f ainsi que ses deux asymptotes verticales.



Exercice 18. (*) Montrer que,
$$\forall x>-1,\quad \ln(1+x)\leq x.$$