Chapitre 10. Fonctions réelles d'une variable réelle II - Calcul Différentiel

Ce chapitre présente un autre aspect de l'étude de régularité des fonctions réelles, la dérivabilité. On y introduit la notion de *développement limité* (d'ordre 1) et énonce l' *inégalité des accroissements finis* ainsi que plusieurs applications de celle-ci, en particulier dans l'étude du comportement asymptotique des suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1 Nombre dérivé

1.1 Nombre dérivé & taux d'accroissement

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. La fonction f est dite* ***dérivable en*** x_0 *si et seulement le* ***taux d'accroissement*** *de f en x_0 admet une limite finie en x_0. Dans ce cas, cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Remarque 1.
Pour que le taux d'accroissement de f en x_0 admette une limite finie en x_0, il faut nécessairement que $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$, c'est à dire $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ou encore que f soit continue en x_0. Autrement dit, on a les implications suivantes:

- f est non continue en $x_0 \Rightarrow f$ est non dérivable en x_0.
- f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en x_0.
  ⚠ La réciproque est bien évidemment fausse (voir exemple un peu plus loin) !

Exemple.

(1) La fonction carrée f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.
(2) Plus généralement, la fonction carrée f est dérivable en tout réel x_0 et $f'(x_0) = 2x_0$.
(3) La fonction racine carrée g est dérivable en tout réel strictement positif x_0 et $g'(x_0) = 1$. Elle n'est pas dérivable en 0 car

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$$

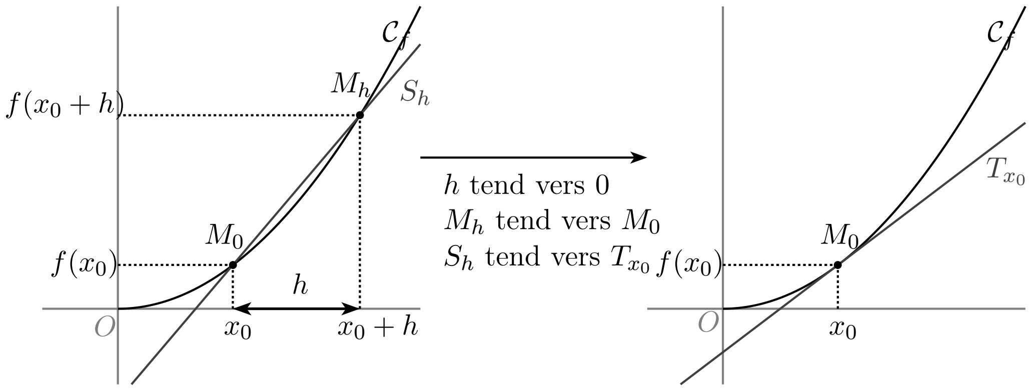
Exercice 1. Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

1.2 Interprétation graphique

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et T_{x_0} la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisses x_0.



Proposition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

(1) Si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0)$ est le *coefficient directeur de la tangente* à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0. L'équation cartésienne réduite de cette tangente est alors :

$$(T_{x_0}): \qquad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

(2) Si la limite du taux d'accroissement en x_0 est infinie, alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une *tangente verticale* au point d'abscisse x_0.

Exercice 2.

(1) Déterminer la tangente à la fonction carrée au point d'abscisse 1.
(2) Donner une fonction usuelle admettant une tangente verticale.

2 Développement limité d'ordre 1

La notion suivante, qui peut être souvent introduite comme définition de la dérivabilité (on verra ci-dessous qu'il y a équivalence), permet des approximations affines (c'est à dire polynomiales de degré 1) de la fonction au voisinage du point où on effectue le développement. C'est un outil très (très) utile dans divers contextes, notamment dans la recherche de limites (pour des fonctions ou des suites).

Définition 2. *Soir f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. On dit que f admet **un développement limité à l'ordre** 1 lorsqu'il existe deux réels a et b, et une fonction ε définie au voisinage de 0 tels que, si h est assez proche de 0 (de sorte que $x_0 + h$ soit assez proche de x_0), on a*

$$f(x_0 + h) = a + bh + h\varepsilon(h), \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Remarque 2.

(1) De manière équivalente, en posant $h = x - x_0$, on peut dire que pour x suffisamment proche de x_0, on a

$$f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0).$$

(2) La quantité $h\varepsilon(h)$ est, par définition, *négligeable* devant h lorsque h tend vers 0. On peut alors la noter $o(h)$ ce qui se lit «petit o de h » (il est sous entendu que c'est au voisinage de 0). L'égalité de la définition précédente s'écrit donc $f(x_0+h) = a + bh + o(h)$. De la même manière, on peut noter $f(x) = a + b(x - x_0) + o(x - x_0)$ «petit o de $x - x_0$ au voisinage de x_0 ».

(3) Le DL est dit à l'ordre 1 car la quantité $a + bh$ est un polynôme de degré 1 en la variable h. On peut *à priori* définir les DL à tous les ordres.
Le $\mathrm{DL}_0(x_0)$ de f s'écrit $f(h) = a + \varepsilon(h)$, avec a réel et $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.
Le $\mathrm{DL}_2(x_0)$ de f s'écrit $f(h) = a + bh + ch^2 + h^2\varepsilon(h)$, avec a, b, c réels et $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

(4) L'idée des DL est de faire l'approximation d'une fonction par un polynôme, de manière **locale** (l'égalité n'est valable que lorsque h est proche de 0, c'est à dire lorsque x est proche de x_0).

Théorème 1. *Les deux proposition suivantes sont équivalentes :*
(i) f est dérivable en x_0;
(ii) f admet un développement limité à l'ordre 1.
Le DL est alors unique et, nécessairement, $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$. Autrement dit, pour h suffisamment proche de 0, ou encore pour x suffisamment proche de x_0,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

ou encore

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Remarque 3. Lorsque x est suffisamment proche de x_0, cela signifie que la courbe représentative de f est très proche de sa tangente en x_0. On parle d'approximation affine:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pour des valeurs de x suffisamment proches de x_0, T_{x_0} est en fait la droite la plus proche de la courbe représentative de f.

Exercice 3.

(1) Donner les développements limités à l'ordre 1 en 0 de :
$x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(1 + x)$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \sqrt{1 + x}$, $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto \ln(1 - x)$.
(2) Donner les développements limités à l'ordre 1 en 1 de $x \mapsto \sqrt{1 + x}$, $x \mapsto \sqrt{1 - x}$ et $x \mapsto \ln(x)$.
(3) En utilisant l'approximation affine pour une fonction f supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, donner une valeur approchée de $f(3, 05)$ sachant que $f(3) = 1$ et $f'(3) = 6$.

⚠ On utilise la même notation $h\varepsilon(h)$ ou $o(h)$ pour chaque DL, mais il s'agit d'une **notation**, ce qui signifie que ces quantités sont **différentes** pour chaque fonction et, pour une même fonction, différentes en différents points où le développement limité existe.

2.1 Quelques développements limités usuels en 0

Les développements limités suivants peuvent être utilisés dans bien des situations et se révèlent extrêmement utiles.

Proposition 2. Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + x\varepsilon(x) &&= 1 + x + o(x) \\
\ln(1 + x) &= x + x\varepsilon(x) &&= x + o(x) \\
\frac{1}{1 + x} &= 1 - x + x\varepsilon(x) &&= 1 - x + o(x) \\
\sqrt{1 + x} &= 1 + \tfrac{x}{2} + x\varepsilon(x) &&= 1 + \tfrac{x}{2} + o(x) \\
(1 + x)^\alpha &= 1 + \alpha x + x\varepsilon(x) &&= 1 + \alpha x + o(x)
\end{aligned}$$

Exercice 4. Déterminer la limite, lorsque $n \to +\infty$, de la suite $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 5. Soient $a, b > 0$. Déterminer

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

2.2 Nombre dérivé à gauche ou à droite

Comme dans le chapitre sur la continuité, on peut d'intéresser, et définir, la dérivabilité d'un côté ou de l'autre d'un point. Plus précisément, on a la définition et les propriétés suivantes.

Définition 3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. La fonction f est dite **dérivable à droite en** x_0 (resp. dérivable à gauche en x_0) si et seulement le **taux d'accroissement** admet une limite finie en x_0^+. (resp. en x_0^-).*

*Cette limite est alors appelée le **nombre dérivé à droite** (resp. à gauche) de f en x_0 et est notée $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).*

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Proposition 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

- S'ils existent, alors $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ sont respectivement les coefficients directeurs des demi-tangentes à droite et à gauche à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0.
- Si $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0. Idem à gauche

Proposition 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \\ \text{ et} \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{array}\right.$

Définition 4. *Si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent mais sont différents, alors f n'est pas dérivable en x_0 et on dit que le point d'abscisse x_0 est un **point anguleux** de $\mathcal{C}_f$.*

Exemple. La fonction valeur absolue est dérivable à droite et à gauche en 0 mais n'est pas dérivable en 0. Le point $O(0,0)$ est un *point anguleux* de la courbe représentative de la fonction valeur absolue.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 3\ln(x) + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(1) Montrer que f est continue en 1.
(2) Etudier la dérivabilité de f en 1.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

(1) Montrer que f est continue en 0.
(2) Etudier la dérivabilité de f en 0.

3 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Si f est dérivable en tout réel x de I, on dit que f est dérivable sur I. De plus la fonction*

$$f' : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

*est appelée la **fonction dérivée** de la fonction f.*

Exemple.

(1) Si $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ alors $f' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$

(2) Si $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ alors $g' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.

3.1 Opérations sur les dérivées - Dérivées des fonctions usuelles

On rappelle très sommairement dans ce paragraphe certaines règles concernant les opérations sur les dérivées. On a choisit d'omettre ici celles concernant la dérivée d'une somme, d'un produit ou d'un quotient, qui sont déjà connues et parfaitement maîtrisées. De plus, les dérivées (et les domaines de dérivabilité) des fonctions usuelles ont été rappelées au cours du Chapitre 1.

Proposition 5. (Dérivée d'une fonction composée).

Soit f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur un intervalle J inclus dans $f(I)$. Alors, $g \circ f$ est dérivable sur I et on a : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$. Autrement dit :

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

Proposition 6. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u^n est dérivable sur I et sa dérivée vaut $nu'u^{n-1}$;
(2) La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée vaut $u'e^u$;
(3) Si la fonction u est strictement positive sur I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$;
(4) Si la fonction u est strictement positive sur I, alors pour tout réel α, la fonction u^α est dérivable sur I et sa dérivée vaut $\alpha u'u^{\alpha-1}$;
(5) Si la fonction u est strictement positive sur I, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut $\frac{u'}{u}$.

3.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 6. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur I (ce qu'on note parfois $f \in \mathcal{C}^1(I)$), si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.*

Exemple.

- Toute fonction polynôme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme népérien est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x^2\ln(x), & \text{si} \quad x > 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \end{array}$$

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que f soit continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.
(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
(3) On suppose que la condition précédente est satisfaite.
  (a) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$?
  (b) La fonction f' est-elle dérivable en 1 ?

4 Dérivation des fonctions réciproques

On a pu voir dans un chapitre précédent que le théorème de bijection permettait de montrer qu'une fonction f réalise une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ lorsque la fonction f est continue et strictement monotone. On est donc, dans ce cas, assuré de l'existence de la fonction réciproque f^{-1}.

La proposition ci-dessous permet de justifier la dérivabilité de f^{-1} en un point y_0 lorsque l'on sait que la fonction f est dérivable en $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Proposition 7 (Dérivabilité d'une fonction réciproque)**.**
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$ (ou encore $x_0 = f^{-1}(y_0)$). Alors,

(i) Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

(ii) Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et sa courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ possède une tangente verticale en y_0.

Exemple. Considérons la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

- On commence par voir que f réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-1; 1/3]$. En effet, f est définie et dérivable sur R (comme quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule jamais) et pour tout x réel,

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

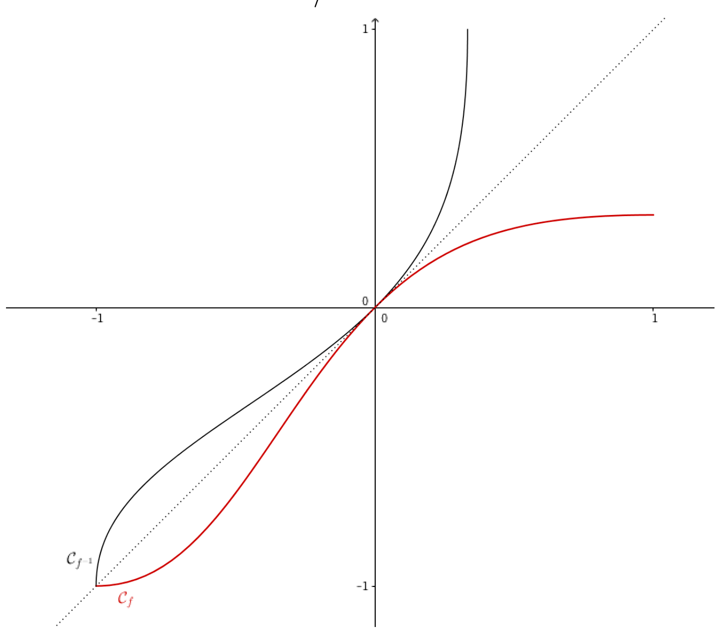
  Ainsi, f est strictement croissante sur $[-1; 1]$. Plus précisément, on a le tableau de variations suivant:

x	-1	0	1
$f'(x)$	0	$+$	0
f	-1	0	$\frac{1}{3}$

- Par le théorème de bijection, f réalise donc une bijection de $[-1;1]$ sur $[-1;1/3]$. On note g sa réciproque. Le même théorème de bijection nous permet de dresser le tableau de variations de g (qui est continue et a le même sens de monotonie que f):

x	-1	0	$\frac{1}{3}$
g	-1 $\nearrow$	0	$\nearrow$ 1

- Concernant la dérivabilité de g, il faut appliquer la proposition précédente. Plus précisément, on sait que f est dérivable sur $[-1;1]$ et que sa dérivée f' s'annule en -1 et 1. Or, $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1/3$ donc g n'est pas dérivable en -1 ni en $1/3$ mais est dérivable sur $]-1;1/3[$. En particulier, g est dérivable en 0, même si $f(0) = 0 = g(0)$ car $f'(0) = 1$, et on sait de plus que
$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$
- On fait apparaître ci-dessous les courbes représentatives de f et $f^{-1} = g$ (symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$). On constate notamment que la courbe de g admet des tangentes verticales en -1 et en $1/3$.



Exercice 10. Montrer que la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -1+e^{x-1}+\ln(x)$ est bijective. Préciser l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisses 0.

Exercice 11. On considère la fonction f définie par
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{array}$$

(1) Déterminer les variations de f et ses limites à l'infini. Préciser l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
(2) Montrer que f induit une bijection, que l'on notera h, de $[-1;+\infty[$ sur $[-e^{-1};+\infty[$.
(3) On note $W = h^{-1}$. Justifier que W est dérivable sur $]-e^{-1};+\infty[$ et montrer que, pour tout $x \in]-e^{-1};+\infty[$,
$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}.$$

5 Dérivation et monotonie

Une des applications de la dérivation est l'obtention des variations de la fonction par le signe de la dérivée. Ces résultats sont connus et utilisés depuis le le lycée. On en rappelle les énoncés ci-dessous.

Théorème 2. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,*

(i) f est croissante sur $I \iff \quad \forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0.$
(ii) f est décroissante sur $I \iff \quad \forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0.$
(iii) f est constante sur $l \iff \quad \forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$

⚠ **Attention.** Le théorème est **faux** si I n'est **pas un intervalle**. En effet, soit par exemple f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Alors, f est dérivable sur $]-\infty : 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = 0$. Pourtant f n'est pas une fonction constante. En effet, $\mathbb{R}^\star$ n'est pas un intervalle!

Proposition 8. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(i) Si $\forall x \in I, \quad f'(x) > 0$, alors la fonction est strictement croissante sur I.
(ii) Si $\forall x \in I, \quad f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Remarque 4. La réciproque de cette proposition est fausse! Par exemple, la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Proposition 9. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(i) Si $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$ et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs sur I, alors la fonction est strictement croissante sur I.
(ii) Si $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$ et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs sur I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

6 Inégalité des accroissements finis

L'*inégalité des accroissements finis*, que l'on énonce ci-après, dans deux versions, permet d'obtenir un contrôle "linéaire" des variations d'une fonction f entre deux points à partir de la dérivée de f entre ces deux points.

Théorème 3 (I.A.F. version 1)**.** *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que*

$$\forall x \in]a, b[, \qquad m \leq f'(x) \leq M.$$

Alors,

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

☞ Graphiquement, cela signifie que la "pente" de la courbe entre a et b (c'est à dire le taux d'accroissement entre a et b) est minoré par le minimum de la dérivée entre a et b et majoré par son maximum.

Exercice 12. Montrer que pour tous réels a et b tels que $a < b < -1$, on a

$$0 \leqslant e^b - e^a \leqslant \frac{1}{e}(b-a).$$

Exercice 13. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Théorème 4 (I.A.F. version 2)**.** *Soit f une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall x \in I, \qquad |f'(x)| \leqslant \alpha.$$

Alors,

$$\forall x_1, x_2 \in I, \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|.$$

Remarque 5.

- Dans cette deuxième version du théorème, les réels x_1 et x_2 sont rangés dans un ordre quelconque, alors que dans la première version du théorème, les réels a et b vérifient $a < b$.
- Rappelons l'équivalence :

$$\forall x \in I, \qquad |f'(x)| \leq \alpha \Longleftrightarrow \forall x \in I, \quad -\alpha \leqslant f'(x) \leqslant \alpha.$$

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(x+1)$. Montrer que :

$$\forall x, y \in [1, +\infty[, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

Exercice 15. Majorer l'erreur commise en faisant les approximations suivantes

$$\sqrt{10001} \simeq 100, \qquad \frac{1}{0,999^2} \simeq 1.$$

6.1 Application. Convergence des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

La deuxième version de l'inégalité des accroissements finis permet parfois d'étudier la convergence de suites définies par récurrence comme dans l'exercice ci-dessous.

Exercice 16. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2).$$

(1) Étudier les variations de f et montrer que $f([1;2]) \subset [1;2]$.
(2) Montrer que pour tout entier n, $u_n \in [1;2]$.
(3) Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell = \sqrt{2}$.
(4) Montrer que pour tout $t \in [1;2]$, $\quad |f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$.
(5) Montrer que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|,$$

puis que :

$$|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(6) En déduire la convergence de la suite (u_n).

7 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 7. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour un entier naturel non nul k, on définit la* ***dérivée d'ordre*** *k de f (**sous réserve d'existence**) notée $f^{(k)}$, par*

$$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$$

avec pour convention $f^{(0)} = f$.

Remarque 6. $f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f''$ et $\forall h, k \in \mathbb{N} \quad \left(f^{(h)}\right)^{(k)} = f^{(h+k)} = \left(f^{(k)}\right)^{(h)}$.

⚠ La notation $f^{(k)}$ n'a rien à voir avec la notion de puissance!

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

(1) Calculer $f^{(k)}(x)$ pour $k \in [\![1, 4]\!]$ et $x \in \mathbb{R}^\star$.
(2) Conjecturer une formule générale pour $f^{(n)}(x)$ puis la démontrer par récurrence sur n.

7.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ ou de classe $\mathcal{C}^\infty$

Définition 8. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit k dans $\mathbb{N}^\star$. On dit que f est* ***de classe*** *$\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si f admet une dérivée d'ordre k sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I.*

Remarque 7.

- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, alors f'' existe donc f' est dérivable sur I donc en particulier f' est continue sur I donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I, pour tout $p \in [\![1, k]\!]$.

Définition 9. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est* ***de classe*** *$\mathcal{C}^\infty$ sur I si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout k dans $\mathbb{N}^\star$.*

Exemple.

- Les fonctions polynômes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad \exp^{(k)} = \exp$.
- Les fonctions ln et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Proposition 10. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$.

- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, alors $f + g$, fg et λf (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et si g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J, avec $J \supseteq f(I)$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

8 Extrema Locaux

Définition 10. *Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$. On dit que f admet un* ***maximum*** *(resp.* ***minimum****) en a si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$). On désigne par* ***extremum*** *un maximum ou un minimum.*

On dit que f admet un ***extremum local*** *si il existe un voisinage de a sur lequel f admet un extremum en a.*

Proposition 11. Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. Si f est un extremum local pour f alors, $f'(a) = 0$.

⚠ La réciproque n'est pas vraie, il faut ajouter une condition.

Théorème 5. *Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum local en a.*

Plus précisément,

(i) Si $f''(x) < 0$ au voisinage de a, alors a est un maximum local;
(ii) Si $f''(x) > 0$ au voisinage de a, alors a est un minimum local;
(iii) Si $f''(x) = 0$ au voisiange de a, alors a est un ***point d'inflexion****; la courbe de f change de concavité en a.*

9 Convexité

9.1 Convexité et concavité pour des fonctions quelconques

Définition 11.

(1) *Une fonction est dite* ***convexe*** *sur un intervalle I si*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t_1, t_2 \in [0;1] \text{ tels que } t_1 + t_2 = 1,\ f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$

(2) *Une fonction est dite* ***concave*** *sur un intervalle I si*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t_1, t_2 \in [0;1] \text{ tels que } t_1 + t_2 = 1,\ f(t_1x_1 + t_2x_2) \geqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$

(3) *On appelle* ***point d'inflexion*** *de $\mathcal{C}_f$, un point d'abscisse x_0 tel que f change de convexité en x_0.*

Remarque 8.

(1) Dire que f est concave sur I revient donc à dire que $-f$ est convexe sur I.
(2) Graphiquement, dire que f est convexe sur $I = [a, b]$ revient à dire que l'arc de courbe joignant les points d'abscisses a et b est en dessous de la corde, c'est à dire la droite joignant ces deux points. (C'est le contraire si f est concave.)

Exercice 18.

(1) Rappeler l'allure des courbes de exp et ln. Semblent-elles convexe(s)? Concave(s)?
(2) En admettant ces résultats de convexité, justifier les inégalités suivantes
  (a) $e^x \leqslant (e-1)x + 1$ sur $[0, 1]$.
  (b) $\ln(x) \geqslant \dfrac{x-1}{e-1}$ sur $[1, e]$.

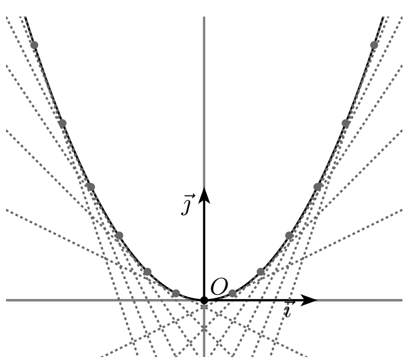
9.2 Convexité pour les fonctions dérivables

Théorème 6. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, de courbe $\mathcal{C}_f$.*

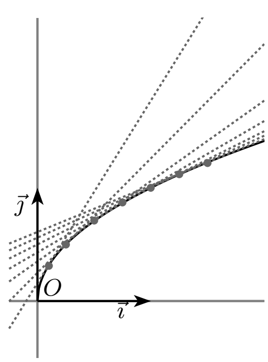
- *La fonction f est* ***convexe*** *sur I si et seulement si f' est croissante sur I.*
- *La fonction f est* ***convexe*** *sur I si et seulement si sa courbe est située au dessus de chacune de ses tangentes.*

- *La fonction f est* ***concave*** *sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.*
- *La fonction f est* ***concave*** *sur I si et seulement si sa courbe est située au dessous de chacune de ses tangentes.*

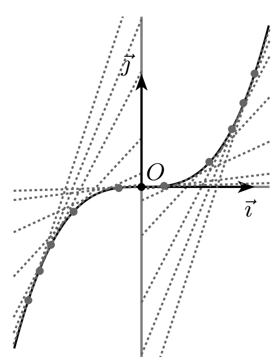
- *Le point A d'abscisse x_0 de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un* ***point d'inflexion*** *si et seulement si f' change de monotonie en x_0 (donc si f' admet un extremum local en x_0).*
- *Le point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un* ***point d'inflexion*** *si et seulement si la tangente en A traverse la courbe.*



La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$.



La fonction racine carrée est concave sur $]0; +\infty[$.



O point d'inflexion. La fonction cube est concave sur $\mathbb{R}^-$, convexe sur $\mathbb{R}^+$.

9.3 Convexité pour les fonctions deux fois dérivables

Comme la plupart des fonctions étudiées sont au minimum deux fois dérivables, le théorème suivant s'avère être le plus pratique de tous pour étudier la convexité des fonctions.

Théorème 7. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I. Alors,*

- *La fonction f est convexe sur I si et seulement si $\forall x \in I, \quad f"(x) \geqslant 0$.*
- *La fonction f est concave sur I si et seulement si $\forall x \in I, \quad f"(x) \leqslant 0$.*
- *Le point d'abscisse x_0 de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe.*

Exemple. On peut alors énoncer des résultats de convexité sur des fonctions usuelles:

(1) La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
(2) La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.
(3) La fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^\star$.
(4) La fonction cube est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$

Exercice 19.

(1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x+1$.
(2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln(x) \leqslant x-1$.

Exercice 20. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(\ln(x))$.

(1) Montrer que f est concave.
(2) En déduire que,

$$\forall x, y > 1, \qquad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 21. Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

(1) Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et étudier la dérivabilité en 0 du prolongement.
(2) Étudier f.
(3) Étudier la convexité de f et montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion. Déterminer alors l'équation de la tangente en ce point.