Chapitre 12. Probabilités sur des univers infinis

Ce chapitre présente les outils permettant de modéliser (et de calculer des probabilités) des évènements générés par des expériences aléatoires pouvant avoir une infinité d'issues.

1 Rappels - Description d'évènements à l'aide de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$

On a déjà pu, lors d'un premier chapitre consacré aux probabilités, constater l'importance de savoir décrire un évènement de manière ensembliste, notamment à l'aide d'intersections ou de réunions. Jusqu'ici, ces intersections et réunions étaient finies, mais nous aurons besoin d'utiliser les définitions, déjà données lors du Chapitre 4, d'une union ou d'une réunion indexée par un ensemble infini.

Définition 1. *(Rappel) Soient E un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une* ***suite*** *de sous-ensembles de E. On peut alors construire la réunion et l'intersection de tous les A_n:*

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x \in A_n$$

et

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ x \in A_n.$$

Exemple. (Un premier exemple important).
José est le concierge d'un immeuble et possède donc à son trousseau un exemplaire de chacune des clés des appartements de l'immeuble, y compris celle de son domicile. En rentrant d'une soirée arrosée, il ne sait discerner laquelle ouvre sa porte d'entrée. N'ayant pas tous ses moyens, il remet dans le trousseau la clé après l'avoir testée, même si celle-ci n'est clairement pas la bonne. On note S l'évènement correspondant à la découverte de la bonne clé et à l'ouverture de la porte.

S'il est facile de comprendre l'évènement S et de le formuler "oralement", son expression permettant le calcul de la probabilité correspondante n'est pas si simple. Pour décrire précisément la structure de l'évènement, on a besoin d'introduire les évènements (pour $n \geq 1$ entier) A_n : "José réussit enfin à ouvrir la porte après n tentatives" et B_n : "la $n-$ième clé testée est la bonne". On peut alors écrire les choses comme suit

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{B}_k \right) \cap B_n \right). \end{aligned}$$

Exercice 1. José et Josette lancent le même dé à tour de rôle *(Josette commence)*.
Le gagnant est le premier à obtenir 6. On s'intéresse aux trois évènements

$$\begin{aligned} A &= \{\text{victoire de Josette}\} \\ B &= \{\text{victoire de José}\} \\ C &= \{\text{il n'y a pas de vainqueur}\} \end{aligned}$$

On introduit également les évènements suivants

$$\begin{aligned} F_n &= \{\text{fin de la partie au } n-\text{ieme lancer}\} \\ S_n &= \{\text{le } n-\text{ieme lancer donne un } 6\} \end{aligned}$$

(1) Traduire les évènements A, B et C avec les évènements F_n et S_n.
(2) Traduire l'évènement F_n en fonction des évènements S_n.

Exercice 2. On lance une pièce de monnaie une infinité de fois. À l'aide des évènements B_n : "le $n-$ième lancer donne *Face*", écrire de manière ensembliste l'évènement "on obtient uniquement des *Pile* à partir d'un moment".

2 Probabilité sur un espace probabilisable infini

2.1 Des évènements probabilisables et des tribus

On a déjà défini la notion de tribu, nécessaire à la définition d'espace probabilisable et à celle de probabilité. Cependant, l'importance de considérer d'autres ensembles que les ensembles de toutes les parties n'a peut-être pas encore semblé nécessaire. Regardons l'exemple suivant.

Exemple. On tire au hasard sur une cible C. On suppose que chaque coup atteint la cible. Le résultat de chaque tir peut être représenté par le point d'impact M sur la cible C.

$$\Omega = \{\text{points de la cible } C\}.$$

Soit A une partie de Ω. Notons également A l'évènement : "l'impact est situé dans la partie A". Intuitivement, si le tir se fait au hasard on pourrait définir

$$P(A) = \frac{\text{Aire de } A}{\text{Aire de } C}.$$

Cette formule n'a de sens que si l'on peut définir l'aire de la partie A. Ce n'est pas le cas pour toutes les parties de la cible! Ainsi, on ne peut pas définir la probabilité sur tout l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ mais uniquement sur le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ constitué des parties de Ω dont on peut définir l'aire.

On rappelle alors la définition d'une tribu, déjà introduite au Chapitre 5.

Définition 2. *(Rappel) Soit Ω un ensemble. On appelle* ***tribu*** *de parties de Ω tout sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que*
(i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
(ii) Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$;
(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'évènements de $\mathcal{A}$, alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

*Munir Ω d'une tribu amène à considérer l'****espace probabilisable*** *$(\Omega, \mathcal{A})$. Les éléments de $\mathcal{A}$ seront alors appelés les* ***évènements*** *de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.*

On rappelle donc qu'une tribu est un ensemble de parties qui contient toujours l'univers, qui est stable par passage au complémentaire et stable par union *dénombrable* (c'est à dire indexée par $\mathbb{N}$).

D'autre part, pour $A \subset \Omega$, on peut regarder la tribu $\sigma_A = \{\emptyset; A; \overline{A}; \Omega\}$. C'est bien une tribu car elle vérifie les conditions de la définitions précédentes. C'est en fait la plus petite tribu qui contient l'évènement A. On l'appelle *tribu engendrée par* A.

On peut par ailleurs, déduire immédiatement de la définition de tribu la propriété suivante.

Proposition 1. Soit $\mathcal{A}$ une tribu de parties de Ω. Alors,

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(2) Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors

$$A \cup B \in \mathcal{A}, \quad A \cap B \in \mathcal{A}, \quad A \setminus B \in \mathcal{A}.$$

(3) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille d'éléments, alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

2.2 Probabilité sur un espace probabilisable

Définition 3. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace probabilisable. On appelle* ***probabilité*** *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *toute application* $P : \Omega \longrightarrow [0; 1]$ *telle que*

(i) $P(\Omega) = 1$*;*

(ii) Si (A_n) *est une suite d'évènements deux à deux incompatibles, alors*

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *est un* ***espace probabilisé****.*

Comme dans le cas des ensembles finis, on a les propriétés immédiates suivantes.

Proposition 2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilité. Alors,

(i) $P(\emptyset) = 0$;

(ii) Si $A \in \mathcal{A}$, on a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(iii) Pour tous évènements disjoints A et B, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

(iv) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$;

(v) Pour toute collection d'évènements deux à deux disjoints $A_0, A_2, ..., A_N$,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{k=0} P(A_n).$$

(vi) Les **formules du crible** restent valides:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C).$$

Remarque 1. Le lecteur aura naturellement remarqué que, si (A_n) est une suite d'évènements deux à deux distincts, alors la série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge. En effet, c'est une série à termes positifs donc sa suite des sommes partielles est croissante et majorée par $P(\Omega) = 1$.

Exercice 3. On admet qu'on a construit un espace probabilisé correspondant à l'expérience aléatoire issue du jeu entre José et Josette de l'Exercice 1. Calculer les probabilités $P(F_n)$ (pour $n \geq 1$) puis, $P(A), P(B)$ et $P(C)$.

Le résultat obtenu pour $P(C)$ dans l'exercice précédent nous incite à introduire la définition suivante.

Définition 4. *On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et A un évènement. On dit que*

- *A est **négligeable** (pour P) si $P(A) = 0$;*
- *A est **presque sûr** (pour P) si $P(A) = 1$.*

De plus, on est également amenés à introduire la notion de croissance et décroissance pour une suite d'évènements dont la définition est vraiment très intuitive.

Définition 5. *Une suite d'évènements (A_n) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est dite*

- ***croissante** si, pour tout $n \geq 0$, on a $A_n \subset A_{n+1}$;*
- ***décroissante** si, pour tout $n \geq 0$, on a $A_{n+1} \subset A_n$.*

Théorème 1. *(Théorème de la limite monotone)*
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (A_n) une suite d'évènements. Alors,

(i) Si (A_n) est croissante, alors la suite $(P(A_n))$ est convergente et

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

(ii) Si (A_n) est décroissante, alors la suite $(P(A_n))$ est convergente et

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Exercice 4. On lance une infinité de fois un dé équilibré. À l'aide des évènements A_n "on obtient aucun 1 lors des n premiers lancers", montrer que presque sûrement, on obtiendra au moins un 1.

On peut déduire quasiment de manière immédiate le résultat suivant à partir du théorème de la limite monotone, en constatant que, si (A_n) est une suite d'évènements quelconques, la suite $(\bigcup_{k=0}^{n} A_k)$ est une suite croissante d'évènements.

Corollaire 1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilité et (A_n) une suite d'évènements. Alors,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$

et

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

3 Indépendance et conditionnement

Toute la partie sur les probabilités conditionnelles et l'indépendance de deux (voire plusieurs) évènements reste valable dans un espace probabilisé infini.

Notamment, on peut généraliser la notion d'évènements mutuellement indépendants au cas d'un nombre infini d'évènements.

Définition 6. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements. On dit que les (A_n) sont **mutuellement indépendants** si pour tout sous-ensemble fini d'entiers $I \subset \mathbb{N}$,*

$$P\left(\bigcap_{n\in I} A_n\right) = \prod_{n\in I} P(A_n).$$

4 Formule des probabilités totales généralisée

Définition 7 (Systèmes complets infinis d'évènements).
Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace probabilisable et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'évènements . On dit que cette suite est un* ***système complet d'événements*** *si et seulement si*

$$(i) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad si \quad i \neq j; \qquad\qquad (ii) \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \Omega.$$

☞ Il suit de la définition que, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

Proposition 3 (Formule des probabilités totales généralisée).
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements et si B est un évènement, alors on a

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(B).$$

Exercice 5. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules blanches et noires:

- U_1 est composée de 3 boules blanches et 1 boule noire
- U_2 est composée de 3 boules noires et 1 boule blanche.

On lance une pièce de monnaie truquée telle que $P(\text{"}face\text{"}) = \frac{2}{3}$. On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois *Face*:

- si le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de *Face* est impair alors on tire une boule dans l'urne U_1;
- si le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de *Face* est pair alors on tire une boule dans l'urne U_2.

Après avoir déterminé la probabilité, pour chaque $k \geq 1$, de l'évènement A_k "l'obtention du premier *Face* a lieu au $k-$ième lancer", utiliser la formule des probabilités totales généralisée pour déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

5 Autres exercices

Exercice 6. (Un aperçu de la loi exponentielle)

Dans une population, la probabilité qu'une famille ait n enfants est estimée par la valeur

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \text{avec } \lambda \simeq 2.$$

(1) Vérifier que $P: \ n \mapsto p_n$ est bien une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
(2) On suppose que les sexes sont équiprobables et qu'il y a indépendance des sexes des enfants à l'intérieur d'une même famille.
   (a) Sachant qu'une famille a n enfants, qu'elle ait la probabilité que ce soit tous les garçons?
   (b) Calculer de la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

Exercice 7. On effectue une suite (infinie) de lancers indépendants d'une pièce équilibrée et l'on désigne par p_n la probabilité de ne pas avoir obtenu trois *Pile* consécutifs lors des n premiers lancers (et A_n l'évènement correspondant).

(1) Calculer p_1, p_2 et p_3.
(2) On introduit les évènements F_i "on obtient *Face* au $i-$ème lancer".

(a) Que peut-on dire de l'ensemble composé des évènements F_1, $\overline{F}_1 \cap F_2$, $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap F_3$ et $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap \overline{F}_3$?

(b) En déduire, pour $n \geq 4$, une expression de p_n en fonction de p_{n-1}, p_{n-2} et p_{n-3}.

(3) Déterminer la limite de p_n, lorsque $n \to +\infty$ (on pourra commencer par montrer que la suite (p_n) converge en montrant par exemple que la suite (A_n) est décroissante).

Exercice 8. Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire une boule dans l'urne, on note sa couleur puis, on la remet dans l'urne en rajoutant deux boules de la même couleur, et on répète l'opération jusqu'à ce que mort s'en suive.

(1) Quelle est la probabilité de A_n "les n premières boules tirées sont rouges"? (On pourra utiliser la formule des probabilités composées).

(2) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges? (On pourra commencer par montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) < x$, puis considérer $\ln(P(A_n))$).

(3) Le résultat reste-t-il vrai si, au lieu d'ajouter deux boules, on en ajoute trois de la même couleur?

Exercice 9. On considère une suite d'évènements (A_n) supposés mutuellement indépendants. Après avoir montré que, pour tout x réel, $1 - x \leq e^{-x}$, montrer que la probabilité qu'aucun des A_n ne soit réalisé est inférieure ou égale à

$$\exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\right).$$

Exercice 10. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (A_n) une suite d'évènements mutuellement indépendants.

(1) Montrer que

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P(\overline{A}_n).$$

(2) On suppose que $P(A_n) \neq 1$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

$$(i)\ P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (ii)\ \sum \ln\left(P\left(\overline{A}_n\right)\right) \text{ diverge}$$

Exercice 11. (La ruine du joueur)

José se rend au casino *Les requins de la côte* avec s euros en poche ($s \in \mathbb{N}^\star$) et l'envie de faire fortune. Après s'être vêtu de ses habits de lumière, il s'installe à une table où, à chaque partie, il gagne avec probabilité $p \in]0;1[$ un euro et perd avec probabilité $q = 1 - p$ un euro. On note N la somme dont dispose le casino (on peut raisonnablement supposer que $s < N$). José décide qu'il arrêtera de jouer s'il devient ruiné (c'est à dire lorsque sa fortune tombe à 0) ou lorsque ce sera le cas pour le casino. On s'intéresse à la probabilité que José soit ruiné.

(1) **Étude d'une suite récurrente**

On s'intéresse à la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_N = 0, \quad \text{et} \quad u_n = qu_{n-1} + pu_{n+1} \quad (n \geq 1).$$

Exprimer u_n en fonction de n, p et q (on pourra différencier $p = q = 1/2$ et $p \neq 1/2$).

(2) **La ruine du joueur**

Pour $k \in [\![0; N]\!]$, on note E_k l'évènement "à un certain moment, la fortune de José atteint k euros mais la partie s'arrête car ce dernier est ruiné". Ainsi, on cherche à calculer $P(E_s)$.

(a) Justifier que $P(E_0) = 1$ et $P(E_N) = 0$.

(b) Montrer que, pour $k \in [\![1; N-1]\!]$,

$$P(E_k) = qP(E_{k-1}) + pP(E_{k+1}).$$

(c) En déduire $P(E_s)$ en fonction de s, p, q et N.

(d) Exprimer également la probabilité que le jeu s'arrête car José a plumé le casino.

(e) Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête?

(f) Comment interpréter ces résultats? Que José joue à la roulette américaine ou à *Pile ou Face* change-t-il quelque chose?

(3) `SciLab.` Que font les fonctions suivantes?

```
rand('uniform'); // tout appel de rand() va générer un nombre réel entre 0 et 1

function p=ruine(s,N,p)
    a=s;
    while a>0 & a<N
        if rand() <=p then
            a=a+1;
        else
            a=a-1;
        end
    end
        if a==0 then
            p=1;
        else
            p=0;
        end
endfunction


function f=frequence_ruine(s,N,p,K)
    f=0;
    for i=1:K
        f=f+ruine(s,N,p);
    end
    f=f/K;
endfunction
```