Chapitre 13. (Introduction aux) Espaces vectoriels

On présente dans ce chapitre la notion d'espace vectoriel via le cas particulier de $\mathbb{R}^n$. Toutes les définitions et outils introduits ici seront repris et développés dans le cours de deuxième année.

1 Notion de vecteur

On rappelle que, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des $n-$*uplets* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ (c'est à dire des suites finies de n réels): pour chaque $i \in [\![1; n]\!]$, $x_i \in \mathbb{R}$.

Définition 1. *On appelle* **vecteur** *(de $\mathbb{R}^n$) tout élément $u = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Ainsi, pour l'instant, un vecteur sera synonyme de $n-$uplet de réels. La notion de vecteur est en fait bien plus générale, on verra plus tard qu'elle concerne tout élément d'un ensemble doté d'une certaine *structure*.

Exemple. Les éléments suivants sont des vecteurs.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

☞ On note traditionnellement les vecteurs en colonne. On voit d'ailleurs que l'ensemble des vecteurs colonnes peut aussi s'écrire $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Définition 2. *On appelle* **vecteur nul** *(de $\mathbb{R}^n$) le vecteur dont toutes les composantes sont nulles:*

$$0_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

☞ Lorsque le contexte est clair (et **uniquement dans ce cas**), on peut éventuellement alléger les notations en écrivant simplement 0 au lieu de $0_{\mathbb{R}^n}$ mais en gardant bien à l'esprit qu'il s'agit d'un abus de notation à manipuler consciencieusement.

2 Opérations sur les vecteurs

On dispose de deux opérations sur les vecteurs:

- l'**addition** de deux vecteurs de même "taille": elle s'effectue comme celle des matrices (matrices de mêmes dimensions):

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

- la **multiplication d'un vecteur par un scalaire** (c'est-à-dire un nombre réel) : elle s'effectue aussi comme celle des matrices:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}.$$

☞ Une fois muni de ces deux opérations, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est appelé **espace vectoriel** $\mathbb{R}^n$.

Définition 3. *Soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs d'un même espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est* ***une combinaison linéaire des vecteurs*** *$u_1, \dots, u_p$ lorsqu'on peut trouver des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que*

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p.$$

☞ Pour savoir si un vecteur v est bien une combinaison linéaire de vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ donnés, il suffit de résoudre un certain système linéaire.

Exercice 1. Dans chaque cas, dire si v est une combinaison linéaire des vecteurs u_i:

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Peut-on remplacer u_3 par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et garder le même résultat?

Définition 4. *Soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs u_i s'appelle Vect$(u_1, \dots, u_p)$:*

$$\mathit{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \{v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p; \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple. En reprenant l'Exercice 2, on a

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\mathbb{R}^3$$

mais

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right)\subsetneq\mathbb{R}^3$$

Il est immédiat de montrer le résultat suivant.

Proposition 1. (Structure de sous-espace de $\mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_p)$). Soient $u_1,\ldots,u_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors,

(i) $0_{\mathbb{R}^n}\in\mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_p)$;
(ii) Si $u,v\in\mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_p)$, alors $u+v\in\mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_p)$;
(iii) Si $u\in\mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_p)$, alors, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda u\in\mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_p)$.

☞ Cette proposition permet de voir que $\mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_p)$ est un *sous-espace vectoriel*, notion qui sera introduite dans un paragraphe ci-après.

Remarque 1. On peut simplifier l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs si l'un (ou plusieurs) de ces vecteurs sont déjà combinaisons linéaires des autres. Plus précisément, si $u_p\in\mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_{p-1})$, alors

$$\mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_p)=\mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_{p-1})\,.$$

Par exemple, on constate que

$$\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right).$$

3 Familles génératrices - Familles libres

Dans un exemple précédent, on a vu que parfois, certaines familles de vecteur permettent, via combinaison linéaire, de générer tout l'espace $\mathbb{R}^n$ mais que ce n'est pas du tout toujours le cas. On précise les choses avec la définition suivante.

Définition 5. *Soit $(u_1,\ldots,u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que cette famille est **génératrice** (ou* engendre *$\mathbb{R}^n$) si*

$$\mathit{Vect}\,(u_1,\ldots,u_p)=\mathbb{R}^n.$$

Exercice 3.

(1) Montrer que la famille $\{u_1,u_2\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^2$, où

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

(2) Montrer que la famille $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$, où

$$u_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad u_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(3) Démontrer que la famille $\{u_1, u_2\}$ n'est pas génératrice dans $\mathbb{R}^3$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il apparaît évident que si une famille de vecteurs est génératrice, la même famille augmentée d'un (ou de plusieurs) vecteur(s) reste génératrice. On énonce néanmoins ce résultat sous forme d'une proposition.

Proposition 2. Soit $\{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Alors toute famille $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\}$ obtenue en ajoutant des vecteurs, est encore génératrice.

Théorème 1. *Pour qu'une famille de vecteurs $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ soit génératrice, il est nécessaire (mais pas suffisant) que $p \geq n$.*

☞ Une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ est composée d'au moins n vecteurs.

Définition 6. *Une famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est dite **liée** si (au moins) l'un de ses vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres. Une famille de vecteurs qui n'est pas liée est dite **libre** (on dit aussi que les vecteurs de la famille sont* linéairement indépendants*).*

Exemple. Une famille $\{u_1, u_2\}$ est liée si et seulement si ces deux vecteurs sont *colinéaires*. Cet exemple montre que la notion de famille liée (ou libre) est une vaste généralisation de la colinéarité.

Proposition 3. Toute famille de vecteurs obtenue en enlevant des vecteurs d'une famille libre est encore une famille libre.

Proposition 4. Une famille de vecteurs $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R},\ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0.$$

☞ Pour montrer qu'une famille est libre, on montre donc que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (0, \ldots, 0)$ est la seule solution du système linéaire

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0.$$

Exercice 4. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées...

(1) ...dans $\mathbb{R}^2$?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) ...dans $\mathbb{R}^3$?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) ...dans $\mathbb{R}^3$?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Théorème 2. *Toute famille libre de $\mathbb{R}^n$ est composée d'au plus n vecteurs.*

4 Bases de $\mathbb{R}^n$

Définition 7. *Une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un **base** (de $\mathbb{R}^n$) si elle est **à la fois** génératrice **et** libre dans $\mathbb{R}^n$.*

Des deux théorèmes précédents, on déduit immédiatement le résultat suivant.

Théorème 3. *Toute base de $\mathbb{R}^n$ est composée d'exactement n vecteurs.*

Exemple. (Base canonique) On appelle **base canonique** de $\mathbb{R}^n$ la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

C'est la base *naturelle* de $\mathbb{R}^n$ car, comme on va le voir ci-dessous, les coordonnées d'un vecteur dans cette base sont données par les composantes mêmes du vecteur.

Théorème 4. *Dans $\mathbb{R}^n$, toute famille libre peut se compléter en une base. Et toute famille génératrice contient une base.*

☞ Ainsi, une famille libre n'est qu'une "*base incomplète*", et une famille génératrice une "*base trop complète*".

Corollaire 1. Dans $\mathbb{R}^n$, toute famille libre de n vecteurs est une base, et toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

☞ Ce théorème peut-être utilisé pour démontrer rapidement qu'une famille donnée est une base de $\mathbb{R}^n$. Plutôt que de vérifier qu'elle est libre **et** génératrice, il suffit de vérifier qu'elle est libre (ou génératrice, au choix) et qu'elle comporte n vecteurs.

Exercice 5. Les familles suivantes sont-elles des bases des espaces vectoriels correspondants?

(1) Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ avec

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ avec

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Définition 8. *(et Proposition) Soit $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Alors, tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de façon unique dans la base $\mathcal{B}$, comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base:*

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ s'appellent les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \{u_1, u_2\}.$$

(1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(2) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $\mathcal{B}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Quelles sont les coordonnées de u_1 dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 7. Soit $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ une base quelconque de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathcal{B}' = \{v+w, u+w, v+w\}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les coordonnées de u, v, w dans $\mathcal{B}$, et dans $\mathcal{B}'$?

5 Sous-espaces vectoriels

On s'intéresse maintenant aux parties de $\mathbb{R}^n$ *stables* par combinaison linéaire et contenant 0. Plus précisément

Définition 9. *Soit F une partie de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^n$ si*

(i) $0_{\mathbb{R}^n} \in F$;
(ii) Pour tous $u, v \in F$, $u + v \in F$;
(iii) Pour tout $u \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u \in F$.

Remarque 2.

(1) Il existe des sous-espaces vectoriels *triviaux*: $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont bien sûr deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
(2) Si cette définition peut paraître abstraite, on peut visualiser certains sous-espaces vectoriels: les droites passant par 0 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, et les plans passant par 0 sont aussi des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
(3) Les conditions (*ii*) et (*iii*) de la définition précédente peuvent être remplacées par une unique condition

$$(ii') \quad \forall u, v \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \lambda u + \mu v \in F.$$

Exercice 8. On considère le système d'équations

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 3y & = & 0 \\ & & 4y & + & z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

☞ L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On verra ci-après qu'il s'agit en fait du *noyau* d'une certaine application linéaire.

Définition 10. *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On appelle base de F toute famille libre $\mathcal{F}$ de vecteurs qui engendre F. C'est à dire, notant $\mathcal{F} = \{u_1, \ldots, u_p\}$, telle que*

$$Vect(u_1, \ldots, u_p) = F.$$

Théorème 5. *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors, F admet toujours (au moins) une base. Toutes les bases de F ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la **dimension** de F et se note* $\dim(F)$.

Exercice 9. (☞ **Méthode**: déterminer une base d'un sous-espace)
On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x - 2y + z = 0 \right\}.$$

(1) Montrer que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(2) Montrer qu'on peut écrire

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(3) En déduire que la famille $\mathcal{F}$ ci-dessous est une base de F. Quelle est alors la dimension de F?

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 10. (Bases de sous-espaces)
Pour chacun des sous-ensembles suivants, montrer qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et préciser la dimension.

$$(i)\ F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x + 2y + 3z = 0 \right\}, \quad (ii)\ G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y = 0 \right\}.$$

Exercice 11. (Équation d'un sous-espace) Donner une équation (ou un système d'équations) caractérisant chacun des sous-espaces suivants.

$$(i)\ F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \qquad (ii)\ G = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Proposition 5. (Propriétés de la dimension)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Alors,
(i) $\dim(\{0_{\mathbb{R}^n}\}) = 0$;
(ii) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$;
(iii) Si $F \subset G$, alors $\dim(F) \leq \dim(G)$;
(iv) Si $F \subset G$ et si $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

Exercice 12. Montrer que les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants sont égaux

$$F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 13. Soit (F_k) une suite croissante (au sens de l'inclusion) de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On note (d_k) la suite (numérique) des dimensions, *i.e.* $d_k = \dim(F_k)$.
(1) Montrer que la suite (d_k) est convergente.
(2) Montrer qu'elle est *stationnaire*.
(3) Montrer qu'il existe un entier p tel que, pour tout $k \geq p$, $F_k = F_p$.

Exercice 14. On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad 2x + 3y - 5z = 0 \right\}, \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + z = 0 \right\}.$$

Les ensembles $F \cap G$ et $F \cup G$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Si oui, expliciter une base et préciser leur dimension.

Proposition 6. L'intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ est encore un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (de dimension inférieure ou égale).

⚠ La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est (en général) pas un sous-espace vectoriel.

6 Applications linéaires

On sait qu'une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme $f : x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre constant. Ce dernier paragraphe généralise la notion d'application linéaire pour des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 11. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application. On dit que f est linéaire si*

(i) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$;

(ii) $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Remarque 3.

(1) Les conditions (i) et (ii) signifient que f préserve les combinaisons linéaires. On peut d'ailleurs remplacer (et c'est d'ailleurs ce que l'on fait quand on veut montrer qu'une application est bien linéaire) ces deux conditions par la condition équivalente

$$(i') \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

(2) Il est capital de remarquer que si f est linéaire alors

$$f(0) = f(0 \times 0) = 0 \times f(0) = 0.$$

Exercice 15. Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est linéaire ou non.

(1) $f_1 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (2x, x+y)$;
(2) $f_2 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x+y, x-2y, 0)$;
(3) $f_3 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x+y, x-2y, 1)$;
(4) $f_4 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 7x$;
(5) $f_5 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$;
(6) $f_6 :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ X \mapsto AX$, où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dernière application de l'exercice précédent est un cas particulier d'un résultat plus général.

Proposition 7. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors, l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, X \mapsto AX$ est linéaire.

En fait, toute application linéaire peut s'écrire sous cette forme. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 8. Soit $f :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $f(X) = AX$. La matrice A est appelée **matrice de f dans les bases canoniques**. Les colonnes de A sont les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 16. Pour chacune des applications linéaires suivantes, écrire la matrice correspondante dans les bases canoniques.

(1) $f_1 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (2x-y, x+3x)$;
(2) $f_2 :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x+y-z, 3x, 2y-z)$;
(3) $f_3 :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (y+2z, 5x-y+z)$.

☞ La matrice de l'application identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est naturellement la matrice identité I_n.

Remarque 4. Si on choisit souvent en premier lieu de représenter une application linéaire par sa matrice dans les bases canoniques, on peut (et on est souvent amené à le faire) représenter l'application linéaire dans d'autres bases. Si $f :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des bases respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, la matrice de f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ (parfois notée $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$) est la matrice dont les colonnes sont les images des des vecteurs de la base de départ exprimées dans la base d'arrivée.

Exercice 17. Soient $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (2x-y, x+y)$, $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) Écrire la matrice de f dans la base canonique.
(2) Montrer que $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(3) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.

Proposition 9. Soient $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires de matrices respectives (dans les bases canoniques) A et B. Alors, l'application $g \circ f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire et sa matrice, dans les bases canoniques, est la matrice AB.

Corollaire 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire dont la matrice (dans la base canonique) est A. Alors, f est bijective si et seulement si A est inversible. De plus, f^{-1} est l'application linéaire dont la matrice, dans la base canonique, est A^{-1}.

Exercice 18. Montrer que les applications linéaires suivantes sont bijectives et préciser leur bijection réciproque.

(1) $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 2y, -x + y)$;
(2) $g:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, -x + 2y - 2z, 3y + z)$.

Définition 12. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.*

*On appelle **noyau** de f, et on note $Ker(f)$ l'image réciproque de $\{0_{\mathbb{R}^m}\}$:*

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) = 0_{\mathbb{R}^m}\} = f^{-1}\left(\{0_{\mathbb{R}^m}\}\right).$$

*On appelle **image** de f, et on note $Im(f)$, l'image directe de $\mathbb{R}^n$ par f:*

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R}^m :\ \exists x \in \mathbb{R}^n,\ y = f(x)\} = f(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 10. Soit $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Proposition 11. (Critères d'injectivité et de surjectivité) Soit $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors,

(i) f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
(ii) f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m$.

Exercice 19. Soit $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, y - z)$.

(1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
(2) Résoudre $f(x) = 0$. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f)$. L'application est-elle injective?
(3) Déterminer trois vecteurs u, v, w de $\mathbb{R}^2$ tels que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u, v, w)$. En déduire une base de l'image de f. L'application est-elle surjective?

Définition 13. *Lorsque $n = m$, une application linéaire $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est appelée un **endomorphisme** de $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 12. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Alors, on a les équivalences suivantes.

$$f \text{ est injective } \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \iff f \text{ est sujective } \iff \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n \iff f \text{est bijective}$$

7 Autres exercices

Exercice 20. On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on introduit les vecteurs

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1) = w_1, \quad f(e_2) = w_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = w_3.$$

(1) Exprimer w_1, w_2 et w_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3.
(2) En déduire la matrice de f dans la base canonique.
(3) Expliciter $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.
(4) Donner une base de noyau de f et une base de son image.
(5) L'application est-elle injective? surjective?

Exercice 21. Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires. Montrer que
$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).$$

Exercice 22. On considère l'application $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (-x+y, x-y, -x+z, -y+z)$.

(1) Montrer que u est linéaire et préciser sa matrice dans les bases canoniques.
(2) On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ celle de $\mathbb{R}^4$.
  (a) Montrer que $\mathcal{F} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, u(e_1), u(e_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
  (b) Écrire la matrice de u de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{F}$.

Exercice 23. Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $E_A = \{X \in \mathbb{R}^n : A \cdot X = X\}$ et $F_A = \{X \in \mathbb{R}^n : A \cdot X = 0\}$.

(1) On suppose dans cette question que $n = 3$ et et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Puis, on pose
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
  (a) Montrer que F_A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que $\{U\}$ en est une base.
  (b) Montrer que E_A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
  (c) Montrer que $\{V, W\}$ est une base de E_A.
  (d) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. En multipliant la relation suivante par A, montrer que si $xU + yV + zW = 0$, alors $yV + zW = 0$. En déduire que la famille $\mathfrak{B} = \{U, V, W\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  (e) Montrer que, si f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A, alors $\mathrm{Mat}(f, \mathfrak{B}) = D$.
(2) On prend maintenant n quelconque et (dans toute la suite) on suppose à présent que $A^2 = A$.
  (a) Montrer que E_A et F_A sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
  (b) Soient $V \in E_A$ et $W \in F_A$. Montrer que si $U = V + W$ alors $V = AU$ puis $W = (I - A)U$.
  (c) Réciproquement, pour tout U de $\mathbb{R}^n$, montrer que $AU \in E_A$ et $(I - A)U \in F_A$.
  (d) En déduire que pour tout U de $\mathbb{R}^n$ il existe un unique $V \in E_A$ et un unique $W \in F_A$ tels que $U = V + W$.
(3) On note alors p la dimension de E_A et q celle de F_A. Soient donc $\{V_1, \ldots, V_p\}$ une base de E_A et $\{W_1, \ldots, W_q\}$ une base de F_A.
  (a) Montrer que $\{V_1, \ldots, V_p, W_1, \cdots, W_q\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
  (b) En déduire que $\dim E_A + \dim F_A = n$.