Chapitre 16. Variables aléatoires réelles II - V.A. Discrètes

Ce second chapitre sur les variables aléatoires généralise les propriétés énoncées pour des variables aléatoires finies à des variables aléatoires discrètes et présente les variables aléatoires discrètes usuelles.

1 Variables aléatoires discrètes - généralités

Dans tout le chapitre, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (a priori) infini. Certaines définitions et propriétés ont déjà été mentionnées dans le Chapitre 14.

Définition 1. *Une variable aléatoire X est dite* ***discrète*** *si ses valeurs peuvent s'écrire sous la forme d'une liste indexée par $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$)*

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, ...\} = \{x_i : \ i \in \mathbb{N}\}.$$

Exemple. On lance une pièce jusqu'à l'obtention du premier *Pile*. Alors, la variable aléatoire X qui compte le nombre de lancers nécessaires est une variable aléatoire discrète, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

☞ Notant $\{x_i : \ i \in \mathbb{N}\}$ les valeurs prises par X, la famille d'évènement $\{(X = x_i) : \ i \in \mathbb{N}\}$ forme un s.c.e et en particulier

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P(X = x_i) = 1.$$

La loi d'une variable aléatoire discrète est la donnée de la suite des couples $\{(x_i, P(X = x_i)) : \ i \in \mathbb{N}\}$. La définition de fonction de répartition ne change pas

$$F_X(t) = P(X \leq t) \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}).$$

On insiste une fois de plus sur le lien entre la loi de X et sa fonction de répartition, qu'on présente à nouveau via la proposition suivante.

Proposition 1. Soit X une variable aléatoire discrète. On suppose que les valeurs de X sont rangées dans l'ordre croissant

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

Alors, pour tout entier $k \geq 2$,

$$P(X = x_k) = F_X(x_k) - F(x_{k-1}).$$

Remarque 1. Sous les hypothèses de la proposition, la fonction F_X est constante sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}[$. La fonction F_X est donc *constante par morceaux* et présente des *sauts* en chaque point x_k. L'amplitude du saut en x_k est égale à $P(X = x_k)$.

2 Espérance

Définition 2. *Soit X une variable aléatoire discrète, de loi $(x_k, p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On dit que X admet une* ***espérance*** *si la série $\sum p_k x_k$ est* ***absolument convergente****. Auquel cas, cette espérance se note $E(X)$ et vaut*

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x_k.$$

Exercice 1. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois et on note X le numéro du premier lancer qui a donné face. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Exercice 2. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs. Si on tire une boule noire, on s'arrête; si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche. Soit X la v.a égale au rang d'obtention de la boule noire. La v.a. X admet-elle une espérance?

Comme pour les variables aléatoires finies, on a les propriétés suivantes pour l'espérance.

Proposition 2 (Linéarité de l'espérance)**.**
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et $a \in \mathbb{R}$.

- si X et Y admettent une espérance, alors il en est de même de $X+Y$ et $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;
- si X admet une espérance, alors il en est de même de aX et $E(aX) = aE(X)$.

Proposition 3 (Positivité de l'espérance)**.**
Soient X une variable aléatoire discrète admettant une espérance. Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.

Théorème 1 (Théorème de transfert)**.** *Soit X une variable aléatoire discrète. Soit $(x_k, p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la loi de X. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors, si la série $\sum f(x_k)p_k$ est absolument convergente, $f(X)$ admet une espérance et*

$$E(f(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k)p_k.$$

3 Moments d'ordre r - Variance

Définition 3. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et soit X une variable aléatoire discrète, de loi $\{(x_k, p_k)\}$. On dit que X admet un* ***moment d'ordre*** *r si la série de terme général $x_k^r p_k$ est absolument convergente. Auquel cas, le moment d'ordre r de X se note $m_r(X)$ et vaut*

$$m_r(X) = E(X^r).$$

☞ Le moment d'ordre 1 n'est autre que l'espérance $E(X) = m_1(X)$.

Proposition 4. Soit X une variable aléatoire discrète et soit $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $r \leq s$. Si X admet un moment d'ordre s, alors X admet un moment d'ordre r.

La preuve est présentée sous la forme de l'exercice suivant.

Exercice 3. Soient r et s deux entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que $r \leq s$.

(1) Montrer que, pour tout x réel,
$$|x|^r \leq 1 + |x|^s.$$

(2) Montrer que, si une variable aléatoire discrète X admet un moment d'ordre s, alors elle admet aussi un moment d'ordre r.

Définition 4. *On dit qu'une variable aléatoire discrète admet une* ***variance*** *si elle admet un moment d'ordre 2. Auquel cas, la variance est définie par*

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

*et on peut également définir l'****écart-type*** *par*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

☞ La Proposition 4 assure qu'une variable aléatoire admettant une variance admet également une espérance.

☞ Comme dans le cas des variables aléatoires finies, on a une autre formule pour calculer la variance, lorsque la v.a. admet un moment d'ordre 2:

$$V(X) = E(X^2) - E(X) = m_2(X) - m_1(X)^2.$$

Exercice 4. Montrer que si une v.a. admet un moment d'ordre 2 et que sa variance est nulle, alors elle est quasi-certaine.

Proposition 5. Si une v.a. discrète X admet une variance, alors, pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$, la v.a. $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

☞ Toujours comme dans le cadre des v.a. finies, mais sous réserve d'existe, une v.a. est dite *centrée* si son espérance est nulle et *réduite* si sa variance vaut 1. Si X admet un moment d'ordre 2, la v.a.

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

est appelée v.a. *centrée-réduite* associée à X.

4 Lois discrètes usuelles

4.1 Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Soit $p \in [0, 1]$. On dit que X suit **la loi géométrique** de paramètre p, ce qui se note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Exercice 5. Démontrer que la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité.

☞ La loi géométrique intervient lorsqu'on répète à l'infini et de façons indépendantes la même expérience de Bernoulli de paramètre p et qu'on **attend** le premier succès. On utilise souvent la terminologie de *temps d'attente*.

Exemple. On lance une infinité de fois un dé équilibré et on note X le numéro du premier lancer qui donner "6". Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/6)$.

Proposition 6. Si $\hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exercice 6. Un concierge rentre chez lui après sa journée de travail. Il dispose, sur son trousseau, de n clés dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais, fatigué, il ne se souvient plus laquelle. Il essaie les clés les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clé qui n'a pas convenu. On note X la variable aléatoire comptant le nombre d'essais nécessaires à l'ouverture de la porte.

(1) Quelle est la loi de X? Quel est le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé ?

(2) Il s'avère en fait la soirée était bien arrosée et que le concierge est également sous l'emprise de l'alcool, en plus de la fatigue. Après chaque essai, il remet la clé qu'il vient d'essayer dans le trousseau. Quelle est maintenant la loi suivie par X? Que vaut son espérance?

Exercice 7. On suppose qu'à la naissance, la probabilité d'avoir un garçon est la même que celle d'avoir d'une fille. On suppose que tous les couples font des enfants jusqu'à avoir un garçon et s'arrêtent ensuite.
On souhaite évaluer la proportion de garçons au sein d'une génération. On note alors X le nombre d'enfants d'un couple et P la proportion correspondante de garçons.

(1) Exprimer P en fonction de X.
(2) Déterminer la loi de X.
(3) Montrer que
$$E(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k}.$$

4.2 Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit **loi de Poisson** de paramètre λ, ce qui se note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exercice 8. Démontrer que la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité.

☞ La loi de Poisson est aussi appelée *loi des évènements rares*, parce que $P(X = k)$ décroît très vite vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

Exemple. En pratique, on considère que le nombre d'appels téléphoniques, dans un intervalle de temps fixé et sur un poste fixé, suit une loi de Poisson.

Proposition 7. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors
$$E(X) = \lambda, \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$

Exercice 9. On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

(1) On choisit au hasard un objet provenant de l'une ou l'autre des chaînes de fabrication. Cet objet est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A.
(2) On suppose que le nombre d'objets produit par la chaîne A en une heure est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$ et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de ces objets qui sont défectueux.
   (a) Calculer, pour n et k entiers naturels, $P([X = k] \cap [Y = n])$.
   (b) En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Exercice 10. On tire un nombre entier X au hasard et on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$ (avec $a > 0$). Si X est impair, Josette gagne et reçoit X euros de José. Si X est pair et supérieur ou égal à 2, c'est José qui reçoit X euros de Josette. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p et q les probabilités respectives que Josette ou José gagnent.

(1) En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer p et q.
(2) Déterminer les espérances de gain de chaque joueur.

5 Autres exercices

Exercice 11. (Loi de Pascal)

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X?

Exercice 12. Tous les jours, José fait le trajet entre son domicile et son travail. Un jour sur deux, il dépasse la vitesse autorisée. Un jour sur dix, un contrôle radar est effectué. On suppose que ces deux événements (dépassement de la vitesse limite et contrôle radar) sont indépendants, et que leur survenue un jour donné ne dépend pas de ce qui se passe les autres jours. Si le radar enregistre son excès de vitesse, Rémi perd un point sur son permis de conduite. On note X_i le nombre de points perdus le jour i.

(1) Soit $x \in]-1;1[$ et $r \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\sum_{n \geq r} n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$
(2) Pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Que représente S_n? Donner sa loi, son espérance, sa variance.
(3) En tant que jeune conducteur, José ne dispose que de 6 points sur son permis. On note T le nombre de jours de validité de son permis dans le cas où celui-ci lui est retiré. Sinon, on définit $T = 0$. Quelle est la loi de T? Son espérance?

Exercice 13. (D'après **EML 2004**)

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est b.
- La proportion de boules rouges est r.
- La proportion de boules vertes est v.

En particulier,
$$0 < b < 1, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < v < 1 \quad \text{et} \quad b + r + v = 1.$$
On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

(1) Préciser les valeurs possibles de X.
(2) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$,
$$P(X = k) = (1-b)\, b^{k-1} + (1-r)\, r^{k-1} + (1-v)\, v^{k-1}.$$
(3) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que
$$E(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2.$$

Exercice 14. (D'après **ECRICOME 2012**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une entreprise dispose d'un lot du n feuilles originales qu'elle a numérotées $1, 2, ..., n$. Elle photocopie ces n feuilles originales et souhaite que chaque original soit agrafé avec sa copie. L'entreprise programme le photocopieur afin que chaque original soit agrafé avec sa copie. Cependant, suite à un défaut informatique, la photocopieuse a mélangé les originaux et les copies. L'entreprise décide donc de placer les n originaux et les n copies dans une boite. Une personne est alors chargée du travail suivant: elle pioche simultanément et au hasard 2 feuilles dans la boite. S'il s'agit d'un original et de sa copie, elle les agrafe et les sort de la boite. Sinon, elle repose les deux feuilles dans la, boite et elle recommence.

On modélise l'expérience par un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$. Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de pioches qui sont nécessaires pour vider la boite lorsque celle-ci contient n originaux et n copies (soit $2n$ feuilles).

On considère l'événement A_n : « à l'issue de la première pioche, les deux feuilles piochées ne sont pas agrafées » et a_n sa probabilité c'est-à-dire que $a_n = \mathrm{P}(A_n)$.

(1) Calculer a_n.

(2) **Étude de** T_2.

On suppose dans cette question que $n = 2$, c'est-à-dire que la boite contient deux originaux et deux copies.

(a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$: $\mathrm{P}(T_2 = k) = (1 - a_2)(a_2)^{k-2}$.

(b) Justifier que la variable $S_2 = T_2 - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

En déduire l'espérance et la variance de T_2 en fonction de a_2.

(3) **Étude de** T_3.

On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est-à-dire que la boite, contient trois originaux et trois copies.

(a) Calculer $\mathrm{P}(T_3 = 2)$ puis $\mathrm{P}(T_3 = 3)$ en fonction de a_2 et a_3.

(b) A l'aide du système complet d'événements $\left(A_3, \overline{A_3}\right)$ démontrer pour tout $k \geq 2$ que

$$\mathrm{P}(T_3 = k + 1) = (1 - a_3)\,\mathrm{P}(T_2 = k) + a_3\,\mathrm{P}(T_3 = k).$$

(c) Montrer que :

$$k \geq 2, \quad \mathrm{P}(T_3 = k) = \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right].$$

(d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(T_3 = k)$.

(e) Prouver que la variable aléatoire $T_3 - 1$ admet une espérance et calculer $E(T_3 - 1)$.

Donner la valeur de $E(T_3)$ en fonction de a_2 et a_3.

(f) Établir que la variable aléatoire $T_3(T_3 - 1)$ admet une espérance et donner sa valeur en fonction de a_2 et a_3.

En déduire que T_3 admet une variance.

Exercice 15. (D'après **EML 2010**)

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2,. C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0; 1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement, : "C_3 termine en dernier son opération". On se propose de calculer la probabilité de A. On remarque que l'événement A est égal à l'événement

$$((\min(X_1, X_2) + X_3) > \max(X_1, X_2)).$$

(1) Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$. On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.

(2) Calculer la probabilité $\mathrm{P}(\Delta = 0)$.

(3) Soit n un entier naturel non nul.

(a) Justifier que

$$\mathrm{P}(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_2 = k)\,\mathrm{P}(X_1 = n + k).$$

(b) En déduire que

$$\mathrm{P}\left(\Delta = n\right) = 2\frac{pq^n}{1+q}.$$

(4) (a) Montrer que Δ admet une espérance $E\left(\Delta\right)$ et la calculer.

(b) Montrer que

$$E\left(\left(X_1 - X_2\right)^2\right) = 2V\left(X_1\right).$$

En déduire que Δ admet une variance $V\left(\Delta\right)$ et la calculer.

(5) Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.

(6) (a) En déduire que

$$\mathrm{P}\left(A\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left(\Delta = k\right) \mathrm{P}\left(X_3 > k\right).$$

(b) Exprimer $\mathrm{P}\left(A\right)$ à l'aide de p et q.

Exercice 16. (D'après **EDHEC 2006**)

Partie 1 : Étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $P(X \geq m) > 0$. On suppose également que X vérifie, pour tous entiers $m, n \in \mathbb{N}$,

$$P_{(X \geq m)}(X \geq n + m) = P(X \geq n).$$

On pose $P(X = 0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

(1) On pose $q = 1 - p$. Montrer que $P(X \geq 1) = q$. En déduire que $0 < q < 1$.

(2) Montrer que, pour tous entiers $m, n \in \mathbb{N}$,

$$P(X \geq n + m) = P(X \geq m)P(X \geq n).$$

(3) Pour tout entier n, on pose $u_n = P(X \geq n)$.

(a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite (u_n) est géométrique.

(b) Pour tout entier n, exprimer $P(X \geq n)$ en fonction de n et de q.

(c) Établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n + 1).$$

(d) En déduire que, pour tout entier n, on a $P(X = n) = q^n p$.

(4) (a) Reconnaître la loi suivie par la variable $X + 1$.

(b) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Partie 2 : Taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout entier n, $P(Y \geq n) > 0$, on définit le *taux de panne* de Y à l'instant n, noté λ_n par

$$\lambda_n = P_{(Y \geq n)}(Y = n).$$

(1) (a) Montrer que, pour tout entier n,

$$\lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}.$$

(b) En déduire que, pour tout entier n,

$$1 - \lambda_n = \frac{P(Y \geq n + 1)}{P(Y \geq n)}.$$

(c) Établir alors que, pour tout entier n, $0 < \lambda_n < 1$.

(d) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que
$$P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k).$$

(2) (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$\sum_{k=0}^{n-1} P(Y=k) = 1 - P(Y \geq n).$$

(b) En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} P(Y \geq n) = 0.$$

(c) Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = +\infty.$$

(d) Conclure quant à la nature de la série de terme général λ_n.

Partie 3 : Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.

(1) Déterminer le taux de panne de la variable X dont la loi a été trouvée à la question 3 d) de la Partie 1.

(2) On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$.

(a) Montrer que $0 < \lambda < 1$.

(b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer $P(Z \geq n)$ en fonction de λ et n.

(c) Conclure que les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout n de $\mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.