ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 17. Fonctions réelles d'une variable réelle IV- Intégrales généralisées

Lorsqu'une fonction f est continue sur un segment $[a;b]$, on va vu au cours du Chapitre 15 comment définir l'intégrale
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
Le but de ce second chapitre d'intégration est de définir, lorsque c'est possible, l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle du type $]-\infty,a]$, $[a,+\infty[$ ou $[-\infty,+\infty[$, a étant un réel. Ces notions permettront d'introduire, dans le dernier chapitre de l'année, la notion de *variable aléatoire à densité.*

1 Extension de la notion d'intégrale

1.1 Intégrale sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;a]$

Définition 1 (Convergence d'une intégrale impropre)**.**
Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a\,;\,+\infty[$.

*(1) On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est **convergente** lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\underset{.}{t}$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et dans ce cas, on pose*
$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$
(2) On définit de la même façon lorsque f est continue sur $]-\infty;a]$,
$$\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Étudier la nature d'une intégrale signifie déterminer si l'intégrale est convergente ou non.

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales suivantes
$$(i)\ \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t, \quad (ii)\ \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad (iii)\ \int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}.$$

1.2 Sur un intervalle du type $]-\infty;+\infty[$

Définition 2. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$. Alors, on dit que l'intégrale*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$
converge si et seulement si les intégrales
$$\int_{-\infty}^{c} f(t)\mathrm{d}t \qquad \textbf{\textit{et}} \qquad \int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

convergent pour tout réel $c \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c} f(t)\mathrm{d}t + \int_{c}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Les deux types d'intégrales nouvellement définis peuvent naturellement être étendus aux fonctions continues par morceaux.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Justifier de la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

1.3 Techniques de calcul

Les propriétés sur les intégrales impropres (linéarité, positivité, croissance) découlent de celles sur les intégrales définies sur un segment par restriction de l'intervalle et passage à la limite.

✎ **Méthode.** (IPP ou un changement de variable sur des intégrales impropres.)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$ dont l'intégrale impropre sur le même intervalle converge. Pour **calculer** cette intégrale impropre en intégrant par partie ou par changement de variable, on suit les étapes suivantes.

(1) On **restreint l'intervalle d'intégration** à $[a\,;x]$ avec $x \geq a$.
(2) On effectue une intégration par parties ou un changement de variable classique sur l'intégrale définie

$$\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{t}.$$

(3) On passe à la limite quand x vers $+\infty$.

⚠ On ne fera donc pas d'IPP directement sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;+\infty[$.

Exercice 3. À l'aide d'une IPP, justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_{0}^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien convergente.
(2) Calculer I_0.
(3) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n = nI_{n-1}$. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.
(4) À l'aide du changement de variable $s = \sqrt{t}$, justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

2 Critères de convergence

2.1 Intégrales de Riemann

Les intégrales de Riemann sont des intégrales de référence que l'on peut utiliser comme du cours.

Théorème 1 (Convergence des intégrales de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

2.2 Critère de comparaison par inégalité

Théorème 2. *Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur $[a\,;+\infty[$ telles que*

$$\forall t \in [a\,;+\infty[\,, \qquad 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors,

$$\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge;} \tag{1}$$

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ diverge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \text{ diverge.} \tag{2}$$

Exercice 5. Déterminer la nature des intégrales

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t, \quad (ii) \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t, \quad (iii) \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t.$$

2.3 Fonctions de signe quelconque

Définition 3 (Convergence absolue)**.**
*Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a;+\infty[$. On dit que l'intégrale de f sur $[a;+\infty[$ est **absolument convergente** si l'intégrale de $|f|$ sur me même intervalle converge.*

Théorème 3. *Si l'intégrale de f sur $[a;+\infty[$ converge absolument, alors elle est convergente*

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

⚠ **La réciproque est fausse!** (L'intégrale peut être convergente sans être absolument convergente.)

3 Autres exercices

Exercice 6. (Gaussienne) Dans cet exercice, on admet la valeur de l'intégrale (qu'on sait être convergente)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

(1) Calculer, éventuellement à l'aide d'intégrations par parties, les intégrales

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t, \quad (ii) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

(2) Soient μ et σ deux paramètres réels fixés. Calculer, via un changement de variable affine, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{où} \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Exercice 7. Pour $n \geq 1$ entier, on définit sur $]0;+\infty[$ la fonction
$$f_n(x) = \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^n}.$$

(1) Montrer que f_n se prolonge par continuité à $[0;+\infty[$.
(2) Étudier la convergence des intégrales
$$\int_0^{+\infty} f_1(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \int_0^{+\infty} f_2(t)\mathrm{d}t.$$
(3) Que dire pour $n \geq 2$?

Exercice 8. Soit $g : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Exercice 9. (D'après **ECRICOME 2010**.)

On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\phi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) = \frac{1}{x}.$$

(1) Montrer que l'équation $\phi(x) = 1$ admet une unique solution α et que $1/3 < \alpha < 1/2$.
(2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2(x+1)}, & \text{si } x > \alpha, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que l'intégrale de f sur $]-\infty;+\infty[$ est convergente et que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 10. (D'après **EDHEC 2004**.)

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$ et on a, en particulier, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}dt$.

(1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier lexistence de u_n.
(2) Calculer u_0 et u_1.
(3) (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ln(2)$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
(4) (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme dune intégrale.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(2) - u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Donner la limite de la suite (u_n).
(5) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n-1}$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

Exercice 11. (D'après **ESC 2002**)

On considère, pour n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = \frac{n \ln x}{n + 1 + nx^2}.$$

On définit également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par

$$h(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

(1) Montrer que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.

(2) (a) Montrer la convergence des deux intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} h(x) \mathrm{d}x.$$

Dans toute la suite de l'exercice on note alors K l'intégrale impropre

$$K = \int_1^{+\infty} h(x) \mathrm{d}x.$$

(3) (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ que

$$K = -\int_0^1 h(u) \mathrm{d}u.$$

(b) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)| \, \mathrm{d}x$ converge et est égale à $2K$.

(c) En déduire également que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x) \mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

(4) (a) Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$|f_n(x)| \leqslant |h(x)| \, .$$

(b) En déduire la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x.$$

(c) Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n + 1 + nx^2}.$$

(d) En déduire successivement

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x)) \mathrm{d}x \leqslant \frac{K}{n+1},$$

puis

$$-\frac{K}{n+1} \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x)) \mathrm{d}x \leqslant 0.$$

(e) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \; dx = 0.$$