Chapitre 18. Variables aléatoires III- V.A à densité

Ce dernier chapitre de l'année présente la notion de variable aléatoire à densité, c'est à dire de variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ est un ensemble continu.

1 Préliminaires et Pré-requis

La définition d'une variable aléatoire à densité étant portée sur une propriété de sa fonction de répartition, on rappelle la définition et les propriétés de celle-ci (déjà énoncées au Chapitre 14).

1.1 Rappels sur les fonctions de répartition

Définition 1 (Fonction de répartition d'une variable aléatoire)**.** *Si X est une variable aléatoire, la fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P([X \leq x]).$$

Proposition 1 (Caractérisation d'un fonction de répartition)**.** Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X si et seulement si

(1) F est croissante sur $\mathbb{R}$;
(2) F est continue à droite en tout point;
(3) F admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$ et vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

☞ On a vu dans les chapitres précédents (avec des lois discrètes) que la fonction de répartition était continue par morceaux mais pas continue partout sur $\mathbb{R}$.

1.2 Primitives et intégrales généralisées

Proposition 2. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$. Notant $F' = f$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

et, de plus,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Preuve. En effet, soient $x \in \mathbb{R}$ et $A \leq X$,

$$\int_{A}^{x} f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_A^x = F(x) - F(A) \longrightarrow F(x),\ A \to -\infty.$$

□

☞ Ce résultat s'étend facilement à une fonction F continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

2 Variables aléatoires à densité - Définition & Propriétés

2.1 Densité de probabilité

Définition 2. *Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition. On dit que X est **une variable aléatoire à densité** si F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.*

Notant $f_X = F_X'$ (là où F_X est dérivable), il suit que f_x est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$$

*Une telle fonction f_X est alors appelée **densité** de X.*

☞ La fonction f_X est **une** densité de X; toute fonction positive qui ne diffère de F_X' qu'en un nombre fini de points est également une densité de X. Il n'y a donc pas unicité de la densité. De la limite de F_X en $+\infty$, on peut déduire que toute densité f_X de X vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Le théorème suivant permet de déterminer si une fonction F donnée est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.

Théorème 1. *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :*

(i) F est continue sur $\mathbb{R}$;
(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points;
(iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$;
(iv) F admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$ et vérifie $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Alors, il existe une variable aléatoire à densité X telle que F soit la fonction de répartition de X. De plus, si f est une fonction positive telle que $F' = f$ en tout point où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exercice 1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2 \\ 1 - \frac{8}{x^3}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z.
(2) Déterminer une densité f de Z.

Le théorème précédent part de la donnée d'une fonction qu'on espère être la fonction de répartition de la v.a. Le théorème suivant permet de déterminer si une fonction f donnée est une densité de probabilité d'une variable à densité X.

Théorème 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :*

(i) f est positive sur $\mathbb{R}$;
(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points;
(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

*Alors il existe une variable aléatoire X telle que f soit une densité de la variable X. On dit alors que f est une **densité de probabilité**.*

Exercice 2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

Exercice 3. Soit $\lambda > 0$. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est une densité d'une variable X. Donner la fonction de répartition de X.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que f est une densité de probabilité.

(2) La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont une densité est f (on dit que X suit la *loi de Rayleigh*).
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X, notée F.
   (b) Déterminer le réel μ, appelé *médiane* de X, tel que $F(\mu) = 1/2$.

(3) On appelle *mode* de X tout réel x en lequel f atteint son maximum. Montrer que X a un seul mode M_0 et le déterminer.

2.2 Calcul de probabilités

Proposition 3. Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X. On note F_X sa fonction de répartition.

(1) Pour tout réel x, on a

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = F_X(x) \qquad \text{et} \qquad P(X \geq x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = 1 - F_X(x);$$

(2) Pour tout réels a et b tels que $a \leq b$, on a

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(t)\mathrm{d}t = F_X(b) - F_X(a);$$

(3) Pour tout réel a, on a

$$P(X = a) = 0.$$

Remarque 1.

- Les probabilités $P(X \leq x)$, $P(X \geq x)$ et $P(a \leq X \leq b)$ s'interprètent comme des aires sous la courbe représentative de la densité f.
- Les inégalités strictes ou larges ne changent pas les probabilités: $P(X < x) = P(X \leq x)$ et
$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b).$$
- Contrairement aux variables discrètes, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = 0$. Ainsi la loi de X n'est pas donnée par les probabilités $P(X = x)$ mais plutôt par la fonction de répartition ou de la densité.

Exercice 5. Soient X la variable aléatoire définie dans l'Exercice 3 et Z celle dans l'Exercice 1. Calculer

- $P(X \leq 2)$
- $P(2 < X \leq 3)$
- $P(X \geq 1)$
- $P(Z < 4)$
- $P(Z \geq 0)$
- $P(Z \in [-1; 3[)$

✎ **Méthode.** (Transformation affine d'une variable à densité.)

Soit X une variable aléatoire de densité f_X et de fonction de répartition F_X. Alors, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, $aX + b$ est encore une variable aléatoire à densité. On commence par déterminer sa fonction de répartition comme suit. Si $a > 0$,

$$\begin{aligned} F_{aX+b}(x) &= P(aX + b \leq x) \\ &= P(aX \leq x - b) = P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) \\ &= F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

Si, par contre, $a < 0$, alors de manière analogue

$$F_{aX+b}(x) = P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

On obtient ensuite une densité en dérivant la fonction de répartition.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) Montrer que f est une densité de probabilité, d'une variable aléatoire que l'on notera X.
(2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
(3) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de la variable aléatoire $Y = 1 - 2X$.

3 Moments d'une v.a à densité

3.1 Espérance d'une variable aléatoire à densité

Définition 3. *Soit X une variable aléatoire de densité f. On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est* ***absolument convergente****. Auquel cas,*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 7. Montrer que la variable aléatoire X définie à l'Exercice 3 admet une espérance, puis la calculer.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2x}}, & \text{si } x \geqslant 2 \\ 0, & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

(1) Montrer la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x}}\mathrm{d}x.$$

(2) Montrer que f est une densité de probabilité d'une v.a. que l'on notera X.
(3) Donner la fonction de répartition F_X de X.
(4) X admet-elle une espérance?

Proposition 4 (Linéarité de l'espérance)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance.

- Pour tous réels a et b, on a : $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- Si $X + Y$ est une variable à densité alors elle admet une espérance et on a

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

3.2 Théorème de transfert et moment d'ordre r

Théorème 3 (Théorème de transfert)**.** *Soient X est une variable aléatoire de densité f et φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.*
*Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t)\mathrm{d}t$ est **absolument convergente**, alors la variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance et on a*

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 9. Soit X la variable aléatoire définie dans l'Exercice 3. La variable e^X admet-elle une d'espérance ?

Définition 4. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente alors on dit que X **admet un moment d'ordre** r, notée $m_r(X)$ et on a*

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\mathrm{d}t.$$

3.3 Variance et écart-type

Définition 5. *Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance de** X le réel*

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Proposition 5. Une variable à densité X admet une variance si et seulement X admet un moment d'ordre 2 et dans ce cas

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Exercice 10.

(1) La variable aléatoire X définie dans l'Exercice 3 admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.
(2) Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2/x^3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Définition 6. *Si X admet une variance alors $V(X) \geq 0$. On appelle alors **écart-type** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*

Proposition 6. Soit X une variable à densité admettant une variance.
Alors pour tout réels a et b, $aX + b$ admet une variance et on a $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

La terminologie déjà introduite précédemment reste d'usage dans le cas des variables aléatoires à densité.

Définition 7.

- *Si X est une variable à densité telle que $E(X) = 0$ on dit que X **est une variable centrée**.*
- *Si X est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X **est une variable réduite**.*
- *Si X admet une espérance et un écart-type non nul, on appelle **variable centrée-réduite associée à** X la variable*

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

4 Lois à densité usuelles

4.1 Loi uniforme continue (sur un segment)

Définition 8 (Loi uniforme sur un segment)**.** *Une variable aléatoire X suit la* ***loi uniforme*** *sur $[a\,;\,b]$, notée $\mathcal{U}([a\,;\,b])$, si une densité de X est la fonction f définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } x \in [a\,;\,b] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

⚠ On ne confondra pas la loi uniforme continue et la loi uniforme discrète!

Proposition 7 (Fonction de répartition pour la loi uniforme)**.** La fonction de répartition d'une variable qui suit la loi $\mathcal{U}([a\,;\,b])$ est la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } x \in [a\,;\,b] \\ 1, & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Exercice 11. Représenter graphiquement une densité et la fonction de répartition de la v.a. X, avec $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$.

Exercice 12. À partir de 7 heures du matin, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée, représentée par le nombre de minutes après 7h, est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0;30]$. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus?

Proposition 8 (Espérance et variance pour la loi uniforme)**.** Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a\,;\,b])$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exercice 13.

(1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Déterminer la loi de $Y = (b-a)X + a$.
(2) Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$. Quelle transformation affine de Z suit une loi uniforme sur $[0;1]$?

☞ L'exercice précédent permet de voir qu'on peut toujours se ramener à une loi uniforme sur $[0;1]$. (Cette remarque est notamment utile pour simuler une loi uniforme sur un segment quelconque à partir de la fonction `rand()` qui, comme chacun l'a compris, simule une loi uniforme sur $[0;1]$.)

4.2 Loi exponentielle

Définition 9 (Loi exponentielle)**.** *Une variable aléatoire X suit la* ***loi exponentielle*** *de paramètre λ (où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$), notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si une densité de X est la fonction f définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 9 (Fonction de répartition pour la loi exponentielle)**.** La fonction de répartition d'une variable qui suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 14. Représenter graphiquement une densité ainsi que la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

Proposition 10 (Espérance et variance pour la loi exponentielle)**.** Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercice 15. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \iff \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \qquad \text{et} \qquad X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

Exercice 16. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $Y = e^X$. On admet que Y admet que Y est une variable aléatoire à densité. Reconnaître la loi de Y.

Définition 10 (Loi sans mémoire)**.** *On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs positives suit une loi **sans mémoire** lorsque pour tout couple (t, h) de réels positifs,*

$$P([X > t + h]) = P([X > t])P([X > h]),$$

ou bien si $P([X > h]) \neq 0$,

$$P_{[X>h]}([X > t + h]) = P([X > t]).$$

Théorème 4 (Caractérisation de la loi exponentielle)**.** *Les variables aléatoires suivant une loi exponentielle (et la variable quasi-certaine nulle) sont les seules variables aléatoires à densité positives sans mémoire.*

4.3 Les lois normales

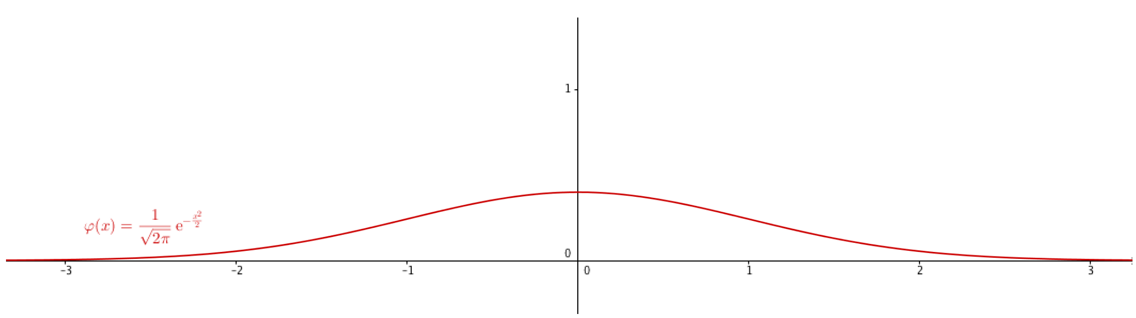
Avant de lire cette section, on pourra refaire l'Exercice 6 du chapitre précédent. Notamment, on rappelle qu'on a prouvé la convergence mais admis la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

Loi normale centrée réduite

Définition 11. *Une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0, 1)$, si une densité de X est la fonction φ définie par*

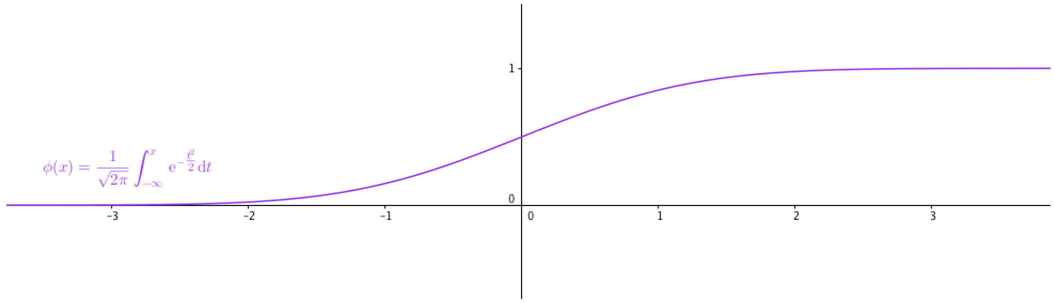
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$



Proposition 11 (Fonction de répartition pour la loi normale centrée réduite)**.** La fonction de répartition d'une telle variable aléatoire est la fonction, notée ϕ, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

Remarque 2. On ne sait pas exprimer la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite à l'aide des fonctions usuelles.



On dispose par contre de quelques règles de calculs ainsi que d'une table de valeurs (voir Appendice).

Proposition 12. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

(i) Comme la densité φ est une fonction paire, on a

$$\phi(0) = P(X \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x).$$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(|X| \leq x) = 2\phi(x) - 1.$$

Exercice 17. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer, à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite fournie en appendice, $x > 0$ tel que $P(-x \leq X \leq x) \simeq 0,95$.

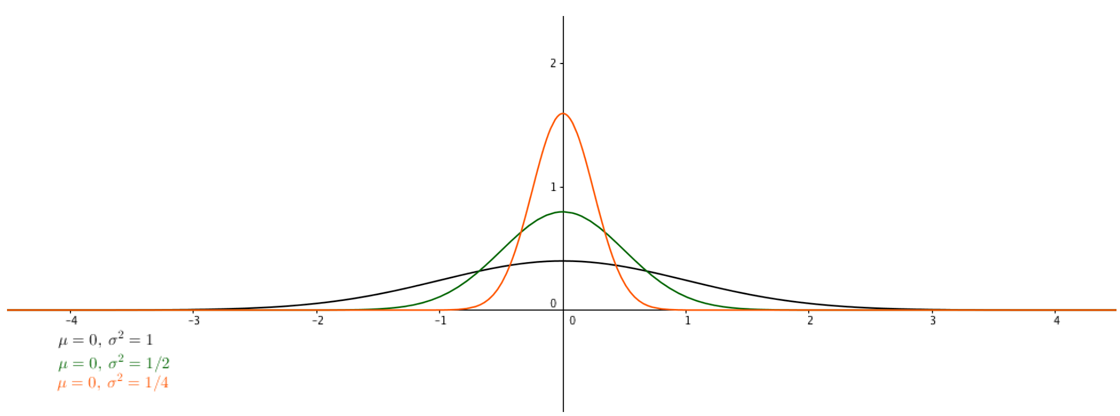
Proposition 13 (Espérance et variance pour les loi normales centrée réduite)**.** Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors X admet une espérance et une variance et on a

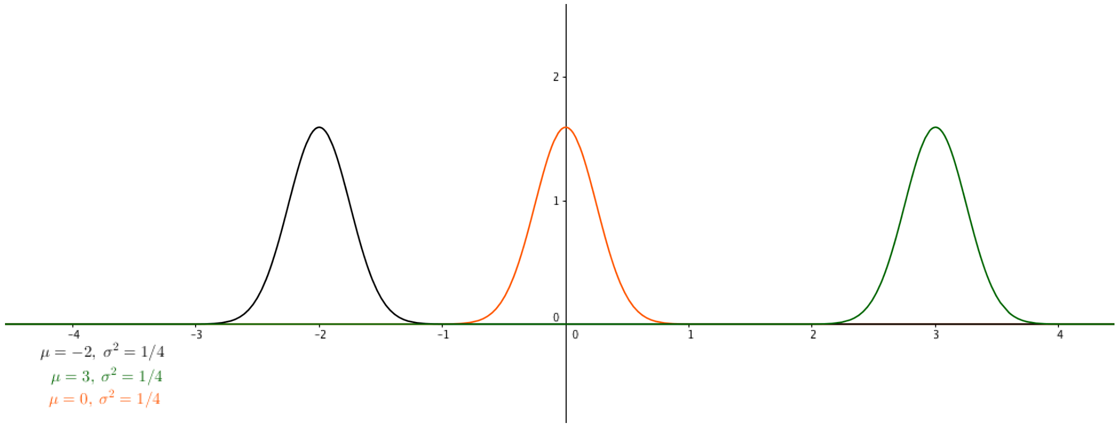
$$E(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(X) = 1.$$

Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

Définition 12. *Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres (μ, σ^2), notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (où $\sigma > 0$), si une densité de X est la fonction $\varphi_{\mu,\sigma}$ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$





Proposition 14 (Espérance et variance pour les loi normales)**.** Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et on a

$$E(X) = \mu \qquad \text{et} \qquad V(X) = \sigma^2 \quad \text{donc} \ \ \sigma(X) = \sigma.$$

☞ Toute variable aléatoire suivant une loi normale peut se ramener par une transformation affine à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Proposition 15 (Changements de variables normales)**.** Si X suit une loi normale de paramètres (μ, σ^2) si et seulement si $X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
Ainsi,

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

☞ Cette propriété est primordiale pour l'étude de la convergence de variables aléatoires et de la théorie de l'estimation (recherche d'intervalles de confiance) qui sera présentée en seconde année.

Exercice 18. Pour cette exercice, on utilisera la table de la loi normale centrée réduite, fournie en appendice.

(1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8,4)$. Donner des valeurs approchées pour

$$P(X < 7,5),\ P(X > 8,5),\ P(6,5 < X < 10),\ P(X > 6 | X > 5).$$

(2) Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale. Déterminer l'espérance et la variance de X sachant que

$$P(X < -1) \simeq 0,05 \quad \text{et} \quad P(X > 3) \simeq 0,12.$$

Exercice 19. (D'après **ECRICOME 2009**)

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0.8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

(1) Déterminer la valeur de σ en utilisant la table jointe en annexe.
(2) Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?
(3) Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ? (On exprimera cette probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis on utilisera la table jointe en appendice).

5 Autres exercices

Exercice 20. Soient $X_0, X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires (indépendantes) suivant une même loi uniforme sur $[0;1]$. Pour $k \in [\![0;n]\!]$, on note

$$U_k = \min(X_0, X_1, ..., X_k).$$

Montrer que U_k est une variable à densité que l'on déterminera.

Exercice 21. (Partie entière d'une loi exponentielle - D'après **EDHEC 2002**)

Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leqslant x < [x] + 1$.
Soit X la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (Y = k) = (k \leqslant X < k+1)$

(1) (a) Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
  (b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k-1)$.
  (c) En déduire que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
  (d) Donner l'espérance et la variance de $Y+1$. En déduire l'espérance et la variance de Y.

(2) On pose $Z = X - Y$.
  (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
  (b) En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k\in\mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0,1[, \quad P(Z \leqslant x) = \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}$$

  (c) En déduire une densité f de Z.
  (d) Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 22. (D'après **EML 2011**)

On note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

(1) Rappeler la loi de U, son espérance et sa variance.

On considère une variable aléatoire T telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{P}_{(U=n)}(T > t) = e^{-nt}.$$

(2) (a) Montrer que

$$\forall t \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{P}(T > t) = \frac{p\ e^{-t}}{1-q\ e^{-t}}.$$

  (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.
  (c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

(3) On note $Z = UT$.
  (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{P}_{(U=n)}(Z > z) = e^{-z}.$$

  (b) En déduire que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
  (c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{P}(U = n\ ,\ Z > z) = \mathrm{P}(U = n)\,\mathrm{P}(Z > z).$$

Exercice 23. (D'après **ECRICOME 2016**)

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :
$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

(a) Étudier les variations de la fonction g_0, définie sur $[0, +\infty[$ par : $g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

(b) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :
$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad g_n'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant 2\ln(1+x).$$
En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.
Calculer soigneusement $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.

(c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :
$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$
et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n$.

(d) Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$:
$$\lim_{x \to +\infty} x^{3/2} g_n(x) = 0.$$

(2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt.$$

(a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.

(c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$$

(d) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.$$

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!}\, g_n(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

(b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

(c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

(d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 0$.

(e) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

(f) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

(g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6 Appendice: Table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$$\phi(t)(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \phi(-x) = 1 - \phi(x).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000