ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 2. Suites, Sommes & Récurrence

Ce second chapitre présente la notion de suite, les premières définitions associées et quelques suites classiques. On y introduit notamment le raisonnement par récurrence, très utilisé dans ce contexte (mais pas seulement!) et l'utilisation du symbole Σ.

Le comportement asymptotique des suites et les outils en permettant l'étude seront introduits dans un chapitre ultérieur.

1 Généralités sur les suites

Définition 1. *Une **suite réelle** est une application d'une partie A de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*

$$\begin{array}{rccl} u: & A & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) := u_n \end{array}$$

On peut la noter u, $(u_n)_{n\in A}$ ou (u_n).

Souvent, la suite u considérée aura pour ensemble de définition $\mathbb{N}$, on notera alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$.

⚠ **Attention.** Il est bien important de différencier les trois choses suivantes: la suite $u = (u_n)$, c'est à dire l'application précédemment définie, l'*ensemble des valeurs* de la suite $\{u_n : n \in A\}$ et le terme de rang n (c'est à dire le terme de la suite *indexé* - à la position - n), noté tout simplement u_n.

Exemple. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ des nombres pairs. On a donc $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ etc... On constate que, plus généralement, on a $u_n = 2n$.

La "formule" précédente s'appelle *expression du terme général*; elle permet de calculer directement le terme de rang n.

1.1 Modes de génération d'une suite

Il existe plusieurs procédés pour définir une suite réelle, que nous présentons ici.

- Expression du type : $u_n = f(n)$

  Une première manière de définir une suite est de donner l'expression de son terme général accompagnée de son ensemble de définition.

  Exemple. On considère la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \qquad n \geq 3.$$

On constate notamment que cette suite n'est définie qu'à partir du rang $n = 3$. On peut donc calculer, par exemple, les trois premiers termes:

$$u_3 = \frac{1}{6}, \qquad u_4 = \frac{1}{24}, \qquad u_5 = \frac{1}{60}.$$

Exercice 1. (Exemples faciles)

(i) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = 2^{-n}$. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.

(ii) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = n^2 + 2n$. Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.

- Définition par récurrence à un terme : expression du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Il peut arriver qu'une suite ne soit pas définie directement en fonction de n mais à partir d'un ou de plusieurs termes précédents. Étant donnée également la valeur du (ou des) premier(s) terme(s), on peut calculer de proche en proche tous les termes de la suite et celle-ci est bien définie.

Exemple. Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & -2u_n + 3, \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

Le calcul des trois premiers termes donne donc $u_1 = 0$, $u_2 = 3$ et $u_3 = -3$. En revanche, le calcul de u_{17} nécessiterait le calcul préalable des 16 termes précédents...

Remarque 1. On obtient la représentation graphique d'une suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ en traçant le graphe de f et la première bissectrice.

- Autres types de définition par récurrence

Il est possible aussi que la définition par récurrence fasse intervenir plusieurs des termes précédents ou bien qu'elle dépende à la fois des termes précédents et de n.

Exemple. La fameuse suite de Fibonacci (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n, \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

est un exemple de suite à récurrence linéaire d'ordre 2 (qui seront notamment étudiées au Paragraphe 5.4).

Exemple. On considère la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & -4v_n + n^2 - n + 7, \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

- De manière implicite

Exercice 2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

(1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.

(2) Calculer u_1 et u_2.

(3) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$. ***(Edhec 2000)***

1.2 Monotonie

Définition 2. *Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est:*

- ***croissante*** *si, pour tout entier $n, u_{n+1} \geqslant u_n$;*
- ***décroissante*** *si, pour tout $n, u_{n+1} \leqslant u_n$;*
- ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante.*

Lorsque les inégalités sont strictes ont dit que la suite est strictement croissante ou décroissante ou monotone.

✎ **Méthode.** Voici plusieurs méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite.

- On peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Si la suite est *strictement positive* (ce dont on devra s'assurer en premier lieu), on peut étudier la position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

Exercice 3. Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par : pour tout entier n, $u_n = n^2 + 1$.

Remarque 2. On peut également s'intéresser à la monotonie *à partir d'un certain rang.*

Par exemple, considérons la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -(n-1)(n-5)$. Les premiers termes de cette suite sont $v_0 = -5$, $v_1 = 0$, $v_2 = 3$, $v_3 = 4$ mais $v_4 = 3$. On constate alors que

$$v_{n+1} - v_n = -n(n-4) - (-(n-1)(n-5)) = -n^2 + 4n + n^2 - 6n + 5 = -2n + 5.$$

Or, $-2n + 5 < 0$ dès que $n \geq 3$. Il suit que la suite (v_n) est strictement décroissante, à partir de $n = 3$.

1.3 Suites bornées

Définition 3. *Considérant toujours une suite réelle (u_n), on dira que celle-ci est:*

- ***majorée*** *si il existe un nombre réel M tel que, pour tout entier n, $u_n \leqslant M$;*
- ***minorée*** *si il existe un nombre réel m tel que, pour tout entier n, $u_n \geqslant m$;*
- ***bornée*** *si elle est à la fois majorée et minorée.*

Proposition 1. (*) Soit (u_n) une suite réelle. On a alors

$$(u_n) \text{ est bornée} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists M \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

Exercice 4. Montrer que la suite (u_n) est bornée, où (u_n) est définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2} + \frac{3}{\sqrt{2n-1}}.$$

1.4 Opérations sur les suites

À partir de deux suites, on peut en construire d'autres. Plus précisément:

Définition 4. *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$ un coefficient constant. Alors, on peut définir les opérations suivantes sur les suites:*

- *La somme des deux suites:*
$$(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} = (u_n + v_n)_{n\geq 0};$$
- *Le produit des deux suites:*
$$(u_n)_{n\geq 0} \times (v_n)_{n\geq 0} = (u_n v_n)_{n\geq 0};$$
- *La multiplication d'une suite par un terme constant:*
$$\lambda(u_n)_{n\geq 0} = (\lambda u_n)_{n\geq 0}.$$

Exercice 5. On considères deux suites bornées (u_n) et (v_n).

(1) Montrer que la somme des deux suites est encore une suite bornée. La réciproque est-elle vraie?
(2) Mêmes questions avec le produit des deux suites.

2 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence sert à démontrer des propositions du type "pour tout entier n, $P(n)$ est vraie". Plus précisément

Théorème 1. *(Principe de récurrence)*
Soit $P(n)$ une propriété, appelée hypothèse de récurrence, définie pour tous les entiers n. Si
 (i) $P(0)$ est vraie ;
 (ii) Pour tout entier n, la véracité de $P(n)$ entraîne celle de $P(n+1)$;
alors $P(n)$ est vraie pour tout n.

Remarque 3. L'hypothèse de récurrence peut également être formulée *à partir d'un certain rang.*

Exemple. Montrons que, pour tout entier $n \geq 1$, $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.

On raisonne bien évidemment par récurrence sur n. L'hypothèse de récurrence à démontrer est alors

$$P(n) : \qquad 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

Pour $n = 1$, on a $2n-1 = 1$ et donc $P(1) : 1 = 1$ est bien vraie. Supposons alors que, pour un certain $n \geq 1$ quelconque, $P(n)$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
On calcule l'expression du membre de gauche au rang $n+1$:

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = 1+3+\cdots+(2n-1)+2n+1.$$

Or, par hypothèse de récurrence (comme $P(n)$ est supposée vraie), on a $1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$, et donc

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2,$$

et on a bien $P(n+1)$. Par récurrence, on en déduit que $P(n)$ est vraie, pour toute valeurs de $n \geq 1$.

✎ **Méthode.** Lorsqu'on raisonne à l'aide du principe de récurrence, il est important de n'oublier aucun des points suivants:

- *L'hypothèse de résurrence*: énoncer clairement $P(n)$;
- *L'initialisation*: vérifier que $P(0)$ est vraie ;
- *L'hérédité*: démontrer que pour toute valeur de n, $P(n)$ entraîne $P(n+1)$. Pour cela, on commence par écrire une phrase du type:
  "Soit n quelconque. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie."
- *La conclusion*: écrire que le principe de récurrence permet bien de conclure que $P(n)$ est vraie pour toute valeur de n.

Exercice 6. (*) Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 7. On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1 &= 0 \\ u_{n+1} &= 2u_n+1 \end{cases}$$

(1) Calculer les six premiers termes de la suites.
(2) Émettre une conjecture quant à l'expression du terme général de la suite.
(3) Démontrer, par récurrence, la conjecture précédemment énoncée.

(Ce type de suite, appelé *arithmético-géométrique*, sera étudié au Paragraphe 5.3.)

Du principe de récurrence (simple) se déduisent[1] également deux autres principes de récurrence qui peuvent être parfois utiles.

[1]Il est possible, avec une récurrence simple, de démontrer la véracité du principe de récurrence double ainsi que celle de la récurrence forte.

Théorème 2. *(Principe de récurrence double)*
Soit $P(n)$ une propriété définie pour tous les entiers n. Si

(i) $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies ;

(ii) Pour tout entier n, la véracité de $P(n)$ **et** *celle de $P(n+1)$ entraînent celle de $P(n+2)$;*

alors $P(n)$ est vraie pour tout n.

Exercice 8. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = 3^n - 2^n$.

Théorème 3. *(Principe de récurrence forte)*
Soit $P(n)$ une propriété définie pour tous les entiers n. Si

(i) $P(0)$ est vraie ;

(ii) $P(n)$ est ***fortement héréditaire****, c'est à dire*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (P(0), P(1), \cdots, P(n) \text{ vraies }) \Longrightarrow P(n+1) \text{vraie},$$

alors $P(n)$ est vraie pour tout n.

Exercice 9. (*) Considérons la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq 2^n$.

3 Le symbole Σ

3.1 Sommes: utilisation du symbole Σ

On a utilisé, à plusieurs reprises, des pointillés $(\cdots)$ dans des formules pour symboliser une somme s'arrêtant au bout d'un certain rang. On introduit alors un symbole rendant plus facile à manipuler les expressions de ce type.

Définition 5. *Soit (a_n) une suite, indexée sur les entiers et soient $p, q \in \mathbb{N}$ deux indices avec $p < q$. La somme des termes de la suite, entre les indices p et q se note*

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q.$$

⚠ **Attention.** Dans cette notation, la lettre i est *muette*; elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre **non déjà utilisée**:

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{j=p}^{q} a_j = \sum_{n=p}^{q} a_n.$$

Remarque 4. Il peut arriver d'utiliser une notation relativement alternative

$$\sum_{p \leq i \leq q} a_i = \sum_{i=p}^{q} a_i$$

qui reste tout à fait intuitive. On ne sera donc pas surpris de la rencontrer.

À titre de premier d'exemple d'utilisation de ce symbole, on énonce une formule classique (à connaître donc), déjà démontrée à l'Exercice 6. On retrouvera ce résultat également un peu plus bas (Paragraphe 5.2), lorsque l'on s'intéressera aux sommes des termes d'une suite géométrique.

Proposition 2. Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Remarque 5. Dans la proposition précédente, si $q = 1$, il est facile de simplifier la somme

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ fois}} = n + 1.$$

Proposition 3. (Propriétés du symbole Σ)

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les égalités qui suivent sont vraies sans condition sur les variables qui y figurent.

- Relation de Chasles

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{q} a_k$$

- Changement d'indice

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p-1}^{q-1} a_{k+1} = \sum_{k=p+1}^{q+1} a_{k-1}$$

- Somme d'une somme

$$\sum_{k=p}^{q} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=p}^{q} b_k$$

- Multiplication par un terme constant

$$\sum_{k=p}^{q} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k.$$

Remarque 6. Un cas particulier de la relation de Chales, très utile pour les récurrences, est que

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}.$$

Si les formules suivantes sont données (et leurs preuves - par récurrence - à connaître), on verra, au cours du chapitre sur la résolution de systèmes à n inconnues, comment trouver la formule correspondant à la somme des autres puissances d'entiers consécutifs.

Proposition 4. (*) (Trois sommes à connaître). Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

3.2 Sommes télescopiques

Dans certaines sommes, les termes se *neutralisent* deux à deux, et il ne reste finalement que les termes extrêmes.

Proposition 5. (*) (Sommes télescopiques)
Soient (a_n) une suite réelle et p, q deux entiers avec $p < q$. Alors,

$$\sum_{k=p}^{q}(a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p.$$

Exemple. On a vu dans un exercice du chapitre précédent que, pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x+1)-P(x) = x$ où $P(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$. En prenant $x = k$ (avec k un entier) on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{n}(P(k+1) - P(k)) = \sum_{k=0}^{n} k.$$

Or la première somme est télescopique et on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{n} k = P(n+1) - P(0) = \frac{1}{2}\left((n+1)^2 - (n+1)\right) = \frac{n(n+1)}{2},$$

et on retrouve bien la formule précédemment annoncée.

Exercice 10. En remarquant que $2k - 1 = (k+1)^2 - k^2$, exprimer, suivant la parité de n, la somme des entiers impairs compris entre 1 et n.

3.3 Sommes à deux indices

On considère maintenant une suite de réels $(a_{i,j})$ indexée par **deux indices** i et j. On cherche donc à écrire la somme de ses termes lorsque les deux indices parcourent un certain ensemble.

Ainsi,

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j}$$

représente la somme de tous les termes $a_{i,j}$ dont le premier indice est compris entre 1 et n et dont le deuxième indice est compris entre 1 et m. Lorsque i et j parcourent le même ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$, la somme précédente s'écrira

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}.$$

Proposition 6.

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

⚠ **Attention.** Si les indices sont toujours des lettres muettes, il faut cependant bien comprendre que $a_{i,j} \neq a_{j,i}$ et être scrupuleux en permutant les symboles Σ.

✎ **Méthode.** Pour calculer une somme double, on fixe un premier indice et on calcule séparément une des sommes en considérant l'indice fixé comme un paramètre. Une fois cette première somme exprimée en fonction de l'indice fixé, il reste à calculer la somme restante grâce à l'expression que l'on vient de trouver.

Exemple. (*) Calculons

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} ij.$$

On applique la proposition précédente:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} ij = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{1 \leq j \leq m} ij \right).$$

Soit donc i **fixé**. La règle de multiplication d'une somme par un terme constant, on déduit que

$$\sum_{1 \leq j \leq m} ij = i \times \sum_{1 \leq j \leq m} j = i \times \frac{m(m+1)}{2}.$$

(En effet, i ne dépend pas de j, il se comporte donc comme une constante dans cette somme.) On peut donc réinjecter l'expression obtenue dans la somme sur les i:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} ij = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(i \frac{m(m+1)}{2} \right) = \frac{m(m+1)}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} i = \frac{n(n+1)m(m+1)}{4}.$$

En particulier, si $m = n$, on obtient la formule

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Exercice 11. Calculer

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i + j).$$

⚠ **Attention.** Il faut bien regarder l'ensemble que parcourent les indices d'une double somme, qui peut intégrer plusieurs conditions sur i et j. Par exemple,

$$\{(i,j) : 1 \leq i,j \leq n\} \neq \{(i,j) : 1 \leq i \leq j \leq n\}.$$

Pour s'en convaincre, on fera l'exercice suivant.

Exercice 12. Calculer

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij.$$

4 Produits: Le symbole Π

Le symbole Π s'utilise de la même façon que Σ mais désigne un produit.

Définition 6. *Soit (a_n) une suite, indexée sur les entiers et soient $p, q \in \mathbb{N}$ deux indices avec $p < q$. Le produit des termes de la suite, entre les indices p et q se note*

$$\prod_{i=p}^{q} a_i = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_q.$$

Exemple. Le nombre $n!$ (appelée *factorielle* n) s'écrit donc

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n}.$$

Proposition 7. (Propriétés du symbole Π)
Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les égalités qui suivent sont vraies sans condition sur les variables qui y figurent.

- Regroupement par paquets
$$\prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{k=p}^{m} a_k \times \prod_{k=m+1}^{q} a_k$$
- Changement d'indice
$$\prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{k=p-1}^{q-1} a_{k+1} = \prod_{k=p+1}^{q+1} a_{k-1}$$
- Multiplication par un terme constant
$$\prod_{k=p}^{q} \lambda a_k = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^{q} a_k.$$

Exercice 13. Calculer
$$(i) \quad \prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2} \qquad\qquad (ii) \quad \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

5 Suites classiques

Les différents outils tout juste introduits nous permettent déjà d'établir des résultats sur des suites classiques.

5.1 Suites arithmétiques

Définition 7. *Une suite (u_n) est dite* ***arithmétique*** *s'il existe une constante $r \in \mathbb{R}$ (appelée alors* ***raison*** *de la suite) telle que, pour tout entier n,*
$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Une récurrence immédiate permet de déduire l'expression du terme général d'une suite arithmétique.

Proposition 8. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique de raison r. Alors,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 + nr.$$

Remarque 7. Si $p < n$, on peut également exprimer u_n à partir de u_p (ce qui est notamment pratique lorsque u_0 n'est pas le premier terme) avec la formule générale suivante qu'il est aisé de vérifier
$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

✎ **Méthode.** Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on montre que la différence de deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'on calcule, pour n entier quelconque, la différence $u_{n+1} - u_n$ et on montre que cette quantité ne dépend pas de n.

Il est aussi évident de constater qu'une suite arithmétique est croissante si et seulement si sa raison est positive ($r \geq 0$) et décroissante si et seulement si sa raison est négative ($r \leq 0$).

Proposition 9. (Somme des termes d'une suite arithmétique)
Soit (u_n) une suite arithmétique. Alors, pour tout $n \geq 0$,
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right).$$

Exercice 14. Soit (u_n) une suite arithmétique et soient m, n deux entiers avec $m < n$. Que vaut

$$\sum_{k=m}^{n} u_k?$$

Exercice 15. Calculer le plus rapidement possible les sommes suivantes

(i) $$1 + 2 + 3 + \cdots + 200$$

(ii) $$1 + 3 + 5 + \cdots + 199$$

(iii) $$5 + 3 + 1 - 1 - \cdots - 11$$

5.2 Suites géométriques

Définition 8. *Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe une constante $q \in \mathbb{R}$ (appelée alors **raison** de la suite) telle que, pour tout entier n,*

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Comme pour les suites arithmétiques, une récurrence très facile permet de déduire l'expression du terme général d'une suite géométrique.

Proposition 10. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = q^n u_0.$$

Remarque 8. Encore une fois, si $p < n$, on peut également exprimer u_n à partir de u_p à l'aide de la formule générale suivante que le lecteur vérifiera avec facilité

$$u_n = q^{n-p} u_p.$$

✎ **Méthode.** Pour montrer qu'une suite non nulle (u_n) est géométrique, on montre que le quotient de deux termes consécutifs est constant. C'est à dire qu'on calcule, pour n entier quelconque, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on montre que cette quantité ne dépend pas de n.

Avec les notations et la terminologie que l'on vient d'introduire, on constate que la Proposition 2 établissait en fait la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1. On en déduit aisément la formule du cas général suivant.

Proposition 11. (Somme des termes d'une suite géométrique)
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors, pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right).$$

Exercice 16. Généraliser la formule précédente; *i.e.* calculer

$$\sum_{k=m}^{n} u_k?$$

Exercice 17. Calculer

$$(i) \quad \sum_{j=2}^{n+1} 2^j \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{k=1}^{n+3} \frac{2^{k+1}}{3^k}.$$

Exercice 18. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q. Exprimer, à l'aide de u_0 et de q, le produit

$$\prod_{k=0}^{n} u_k.$$

5.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 9. *Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** si il existe un réel $a \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ et un réel $b \neq 0$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque 9. On exclue de la définition le cas $a = 1$, correspondant à une suite arithmétique de raison b, et le cas $a = 0$, correspondant à la suite constante égale à b car on sait ils appartiennent à d'autres types de suites qu'on sait déjà étudier.

La méthode qui va suivre permet de trouver l'expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique. C'est la démarche qu'**il faudra reprendre à chaque fois** que la situation se présentera.

✎ **Méthode.** Pour trouver la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b,$$

on suit les étapes ci-dessous:

(1) On résout l'équation de point fixe $al + b = l$.
(2) On introduit alors une suite auxiliaire (v_n), définie par $v_n = u_n - l$, dont on justifie la nature géométrique en précisant la raison q.
(3) On écrit alors l'expression du terme général de v_n, $v_n = q^n v_0$.
(4) On en déduit l'expression du terme général de u_n, valable pour toute valeur de n:

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + l = q^n v_0 + l \\ u_n &= q^n(u_0 - l) + l. \end{aligned}$$

Exercice 19. En suivant la méthode précédente, donner l'expression du terme général de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 3u_n + 2, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

5.4 Suites à récurrence linéaire d'ordre 2

Définition 10. *Une suite (u_n) est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** si il existe un réel a et un réel $b \neq 0$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Dans le but de pouvoir étudier une suite vérifiant la relation de récurrence précédente, faisons d'ores et déjà quelques remarques.

Remarque 10. Considérons donc cette fameuse relation de récurrence

$$(R) \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(1) Il est important d'observer qu'une suite vérifiant (R) est totalement déterminée par les valeurs de ses deux premiers termes.
(2) On observe également que si (a_n) et (b_n) sont deux suites vérifiant (R), alors la suite $(a_n) + (b_n)$ vérifie encore (R) tout comme la suite $\lambda(u_n)$ pour n'importe quelle valeur $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) Une approche naïve serait alors de rechercher une suite géométrique (non nulle) de la forme (q^n) vérifiant (R) et de construire d'autres suites vérifiant (R) jusqu'à les obtenir toutes. Injectant ceci dans (R), on constate que la raison q d'une telle suite devrait nécessairement vérifier l'équation du second degré

$$(E) \qquad q^2 - aq - b = 0.$$

Cette équation est alors appelée **équation caractéristique** de la suite (u_n).

On peut alors énoncer le résultat puis la méthode d'étude de telles suites.

Théorème 4. *Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est notée (E) et son discriminant Δ. Alors,*

(i) Si $\Delta > 0$ - et donc si l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes q_1 et q_2 - il existe deux réels λ, μ tels que

$$u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n, \qquad n \geq 0.$$

(ii) Si $\Delta = 0$ - et donc si l'équation (E) admet une unique solution réelle q_0 - il existe deux réels λ, μ tels que

$$u_n = (\lambda + n\mu) q_0^n, \qquad n \geq 0.$$

Dans les deux cas, les couples de réels (λ, μ) sont uniques. On les calcule notamment en injectant les deux premiers termes dans l'expression du terme général u_n.

✎ **Méthode.** Pour étudier une suite (u_n) récurrente linéaire d'ordre 2, on suit les étapes ci-dessous.

(1) On forme l'équation caractéristique (E) associée à la suite (u_n).
(2) On résout l'équation (E). En fonction des solutions, on écrit qu'un théorème du cours nous permet de connaître la forme du terme général u_n et qu'il reste donc à déterminer les deux paramètres λ et μ.
(3) On détermine λ et μ en résolvant un système de deux équations à deux inconnues, obtenu en injectant les deux premiers termes de la suite (u_n) dans l'expression du terme général.

Exercice 20. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression du terme général de la suite (u_n) définie par:

(i)
$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

(ii)
$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 2 \\ u_{n+2} & = & 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$$

(iii)
$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n \end{cases}$$