Chapitre 3. Comportement asymptotique des suites

Après avoir introduit dans le chapitre précédent la notion de suite et les premiers outils d'étude, nous nous intéressons ici à leur comportement asymptotique, c'est à dire au comportement de la suite lorsque l'indice n tend vers l'infini.

En effet, on a déjà constaté, notamment avec `SciLab`, que pour certaines suites, les termes devenaient parfois de plus en plus proches d'une même valeur, alors que dans certains cas au contraire, ils pouvaient devenir de plus en plus grand.

On va donc introduire la notion de suite convergente, de suite divergente (à la fois vers l'infini et aussi sans limite) puis présenter les méthodes et les résultats qui permettent donc de donner la **nature** de la suite qu'on étudie.

1 Suites convergentes et divergentes

1.1 Suites convergentes

On dira d'une suite qu'elle est **convergente** (ou qu'elle converge), si ses termes se "rapprochent" de plus en plus d'une certaine valeur *limite* l. Ceci s'écrit naturellement rigoureusement à l'aide de quantificateurs.

Définition 1. *Soient (u_n) une suite numérique et $l \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) converge vers l (ou que la suite (u_n) a pour limite l) si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - l| < \epsilon.$$

Il est important de bien comprendre ce que cela signifie. Cette définition veut dire que, pour un écart aussi petit que l'on veut ($\forall \epsilon > 0$), on va pouvoir trouver un rang N ($\exists N \in \mathbb{N}$) à partir duquel tous les termes de la suite ($\forall n \geq N$) seront distants de l d'au plus l'écart choisi ($|u_n - l| < \epsilon$).

Une autre façon est aussi de formuler les choses comme ceci: la suite converge vers l tout intervalle (ouvert) centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N (ou encore tous les termes sauf un nombre fini - ceux dont le rang est inférieur à N). En effet,

$$|u_n - l| < \epsilon \Longleftrightarrow l - \epsilon < u_n < l + \epsilon.$$

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

(1) Représenter graphiquement les sept premiers termes de la suite.
(2) Conjecturer, sans démontrer, sur la nature de (u_n).
(3) Déterminer graphiquement, pour $\epsilon = 0.15$ puis pour $\epsilon = 0.0625$, le plus petit N tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - 1| < \epsilon.$$

Exemple. Regardons la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{n^2+1}$. En regardant le terme général, ou en calculant éventuellement les premiers termes, on peut penser que la suite est décroissante et qu'on se rapproche de plus en plus de 0. On va montrer que c'est le cas, en vérifiant que la définition de convergence est satisfaite.

La distance de u_n à 0, qu'on va chercher à estimer, est exactement $|u_n|$. Comme la suite est ici à termes positifs, on doit donc estimer u_n. Soit alors $\epsilon > 0$ arbitrairement choisi et fixé (on garde en tête qu'il s'agit d'un nombre très petit). Peut-on alors trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite seront plus petits que ϵ? Ceci revient à trouver le plus petit entier n (qui dépendra naturellement de ϵ) tel que

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} < \epsilon.$$

Cette inéquation est facile à résoudre; on doit avoir $n > \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}$. Il suffit donc de prendre

$$N = \lfloor \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}} \rfloor + 1$$

pour que tous les termes de la suite dont l'indice est plus grand que N soient plus petits que ϵ.

L'exemple précédent démontre rigoureusement la convergence de la suite vers 0. Il est important de l'avoir compris et de savoir le faire. Cela dit, en pratique on fera souvent appel à des suites dites *de référence* et à des règles de calcul pour déterminer la limite. Ces outils seront présentés dans la section suivante. Dans certains cas plus complexes, une étude plus précise et qualitative de la suite (à l'aide d'encadrements par exemple) peut s'avérer nécessaire pour appliquer des critères de convergence, comme on le verra dans la dernière section de ce chapitre.

Exercice 2. Montrer, à l'aide de la définition, que la suite (v_n), définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2n-3}{n}$ converge vers 2.

Les démonstrations des deux propositions suivantes ne sont pas exigibles. Néanmoins, elles sont instructives et se permettent donc de figurer à la suite de leurs énoncés.

Proposition 1. Si la limite d'une suite existe, elle est unique.

Preuve. Supposons qu'une suite (u_n) converge vers deux limites l_1 et l_2. On va alors appliquer la définition de la limite. Soit $\epsilon > 0$. La convergence de (u_n) vers l_1 assure l'existence d'un rang N_1 à partir duquel $|u_n - l_1| < \epsilon$. Comme (u_n) converge également vers l_2, la définition nous garantie qu'à partir d'un certain rang N_2, on a $|u_n - l_2| < \epsilon$. A priori, ces rangs ne sont pas les mêmes. Si on veut être sûr de vérifier les deux inégalités, il faut prendre un indice quoi soit supérieur à N_1 et N_2. En étant supérieur au maximum des deux, on est bien supérieur aux deux. Soit donc $n \geq \max(N_1, N_2)$. On a, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leq |u_n - l_1| + |u_n - l_2| \leq \epsilon + \epsilon \leq 2\epsilon.$$

Mais ϵ a été arbitrairement choisi et peut être aussi petit qu'on veut. Mais la différence entre deux nombres réels ne peut être arbitrairement petite que si ces deux nombres sont égaux:

$$(\forall \epsilon > 0, \quad |l_1 - l_2| \leq \epsilon) \Longleftrightarrow l_1 = l_2.$$

Il n'y a donc qu'une seule limite possible. □

Proposition 2. Si une suite (u_n) est convergente, alors elle est bornée. La réciproque est fausse.

Preuve. Supposons en effet que la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$. Alors, par définition de la limite (pour par exemple $\epsilon = 1$), il existe un rang N à partir duquel

$$|u_n - l| \leq 1 \Longleftrightarrow l - 1 \leq u_n \leq l + 1 \Longrightarrow -|l| - 1 \leq u_n \leq |l| + 1.$$

Cet encadrement est vrai pour tous les termes sauf un nombre fini (ceux avant u_N). Mais, dans le pire des cas, ces termes ont un *maximum* (le plus grand d'entre eux, qui existe bien puisqu'on en a un nombre fini). Dans tous les cas, on a, pour **tout** $n \geq 0$,

$$|u_n| \leq \max\left(|l| + 1, \max(|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N-1}|)\right)$$

et la suite est bien bornée. Il est très facile de voir que la réciproque est fausse en exhibant un contre-exemple, comme $((-1)^n)$ qui est bien bornée mais ne converge pas (voir ci-après). □

1.2 Suites divergentes

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**. Il faut cependant faire attention à ce que veux dire la négation de la convergence; une suite divergente ne le fait pas nécessairement vers l'infini. Il n'y a juste pas de valeur limite dont on se rapproche.

En effet, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ alterne indéfiniment entre 1 et -1. Elle ne converge pas mais ne tend pas non plus vers l'infini. On dira dans ce cas que la suite est **divergente sans limite**. La définition suivante permet de préciser un autre cas.

Définition 2. *On dit qu'une suite (u_n)* ***diverge vers*** *$+\infty$ lorsqu'elle prend des valeurs arbitrairement grandes. C'est à dire si*

$$\forall A \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \geq A.$$

Cela veut dire qu'on peut toujours trouver un rang N à partir duquel tous les termes seront plus grands qu'une valeur abitraire A ou encore que, pour chaque valeur $A \geq 0$, l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang.

Exercice 3. Montrer à partir de la définition que la suite (u_n), définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sqrt{n-1}$, diverge vers $+\infty$.

Exercice 4. Adapter la définition précédente à la divergence vers $-\infty$ pour une suite (u_n).

2 Limites des suites de référence

On dispose de tout un panel de suites dont on connait la nature (et la valeur de la limite). Naturellement la preuve des résultats suivants se fait *via* la définition précédente mais, fort heureusement, on peut les utiliser tels quels sans avoir à tout re-démontrer à chaque fois.

Proposition 3. (Limites de référence)

- **Suites géométriques:** $u_n = q^n$. Alors,

  (i) Si $|q| < 1$, la suite converge vers 0;
  (ii) Si $q = 1$, la suite est constante et converge donc vers 1;
  (iii) Si $q > 1$, la suite diverge vers $+\infty$;
  (iv) Si $q \leq -1$, la suite n'a pas de limite.

- **Puissances:**

$$\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ 0, & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

- **Logarithme:**

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$$

J En prenant par exemple $q = e > 1$ dans le cadre des suites géométriques, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty.$$

Exercice 5. À partir des limites de référence, déterminer les limites éventuelles des suites suivantes:

$$(i)\ n^3 \quad (ii)\ n\sqrt{n} \quad (iii)\ \frac{n^2}{\sqrt{n}} \quad (iv)\ \frac{1}{n^{-0.001}} \quad (v) - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \quad (vi)\ \frac{1}{10}\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)^n \quad (vii)\ \frac{1}{n}.$$

3 Opérations sur les limites

Connaissant la limite de deux suites, on peut parfois en déduire la limite de la suite obtenue par opérations sur les deux suites. Voici donc une série de tableaux qui donnent les résultats de ces opérations. Dans le cas où il n'est pas possible de conclure en toute généralité, c'est à dire dans le cas d'une **forme indéterminée**, on notera "?" (et il faudra travailler un peu plus...)

Multiplication par un réel: Soit (u_n) une suite ayant une limite et λ un réel non nul.

Le tableau suivant donne la limite éventuelle de (λu_n) selon la limites de (u_n).

$\lim u_n$ \ λ	$\lambda > 0$	$\lambda < 0$
$l \in \mathbb{R}$	λl	λl
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{n^2} = 0.$

Somme: Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant des limites (finies ou infinies).

Le tableau suivant donne la limite éventuelle de $(u_n + v_n)$ selon les limites de (u_n) et (v_n).

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$		$+\infty$	?
$-\infty$			$-\infty$

Exemple. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + n^2 = +\infty.$

J *En combinant la multiplication par -1 et la somme on peut aisément déduire les limites obtenues par **soustraction**.*

Produit: Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant des limites (finies ou infinies).

<table>
<tr><th>$\lim u_n$ \ $\lim v_n$</th><th>$l' > 0$</th><th>$l' < 0$</th><th>$l' = 0$</th><th>$+\infty$</th><th>$-\infty$</th></tr>
<tr><td>$l > 0$</td><td colspan="3" rowspan="3">$l \cdot l'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$l < 0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$l = 0$</td><td colspan="2">?</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td colspan="3"></td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td colspan="4"></td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

Le tableau ci-dessus donne la limite éventuelle de $(u_n v_n)$ selon les limites de (u_n) et (v_n).

Exemple. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^n + 2\right) = -2.$

Inverse: Soit (u_n) une suite ayant une limite.

$\lim u_n$	$l \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$
$\lim \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	0

⚠ Lorsque $\lim u_n = 0$, il y a trois cas:

Si $u_n > 0$: $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$

Si $u_n < 0$: $\lim \frac{1}{u_n} = -\infty$

Sinon : $\frac{1}{u_n}$ n'a pas de limite

$$\textit{Exemple.} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = -\infty.$$

J *En combinant la multiplication et le passage à l'inverse, on peut également déduire les limites obtenues par passage au **quotient**.*

$$\textit{Exemple.} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = -\infty.$$

Composition avec une fonction continue:

Soient (u_n) une suite qui converge vers $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f une fonction continue dont la limite en l vaut a (avec également $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = a.$$

$$\textit{Exemple.} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n^3}+4} = 2.$$

4 Formes indéterminées. Croissances comparées

On peut, dans certains cas, lever l'indétermination d'une limite par des méthodes que l'on présente dans cette section.

Proposition 4. (Croissances comparées) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $q > 0$.

(i) La suite $(n!)$ l'emporte sur les suites (q^n), (n^α) et $\left(\ln(n)^\beta\right)$.

(ii) La suite (q^n) l'emporte sur les suites (n^α) et $\left(\ln(n)^\beta\right)$.

(iii) La suite (n^α) l'emporte sur les suites $\left(\ln(n)^\beta\right)$.

Cela signifie que si l'on effectue un **produit** ou un **quotient** de ces familles de suites, la limite est celle de la suite qui l'emporte, en tenant compte des opérations sur les limites.

Exemple.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n!} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{0.001}}{\ln(n)^{1000}} = +\infty$$

œ **Méthode.** (Lever une forme indéterminée.) Une fois qu'on est bien sûr d'être face à une forme indéterminée on peut:

(1) Conclure directement "*Par croissance comparée...*" si l'expression que l'on étudie est déjà sous une forme qui le permet.

(2) Essayer de se ramener au cas précédent, la plupart du temps en factorisant par le terme prépondérant, ou éventuellement via la méthode de la quantité conjuguée et parfois en appliquant les deux!

Exemple.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)} = 2.$$

En effet,

$$\frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)} = \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n\left(n^2+1-n^2\right)} = \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{n} \to 2$$

5 Théorèmes de convergence

Les méthodes de calcul des parties précédentes permettent, parfois, de déterminer la nature de suites explicites dont l'expression du terme général permet leur application.

Cela ne représente pas tous les cas de figure que l'on rencontrera. Parfois, une étude plus théorique est qualitative sur le comportement de la suite sera nécessaire. Nous en présentons des méthodes ici.

5.1 Limites & Inégalités

Proposition 5. (Passage à la limite dans une inégalité.)
Soient (u_n) et (v_n) deux suite **qui convergent** et telles que $u_n \leq v_n$ (ou $u_n < v_n$) à partir d'un certain rang. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

⚠ **Attention.** Le passage à la limite transforme **toutes les inégalités** (y compris les strictes) en **inégalités larges**.

Remarque 1. On constate que la condition de majoration doit être vérifiée *à partir d'un certain rang.* En effet, comme on s'intéresse à ce qui se passe *à l'infini*, on ne fait que peu de cas de ce qui se passe au niveau des premiers termes de la suite.

Proposition 6. (Passage à la limite dans une égalité.)
Si une suite (u_n) a une limite (finie ou infinie) alors toutes les *sous-suites* (u_{n+1}), (u_{n+2}), $(u_{2n}), (u_{2n+1})$, ... ont la même limite que la suite (u_n) dont elles sont extraites.

Exemple. On sait (justifier) que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n = 0$. Il suit, par exemple, que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2n}\right)^{2n} = 0.$$

Exemple. On a travaillé, dans le sujet du Devoir Maison n°2, sur la suite (u_n) qui vérifiait

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

On pourrait justifier, avec des arguments qui seront présentés un peu après, et les inégalités montrées, que la suite (u_n) est convergente, vers une limite l. Mais alors, (u_{n+1}) aussi. On a donc, par composition des limites

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & \sqrt{u_n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & \sqrt{l+1} \end{array}$$

et l vérifie l'équation $l = \sqrt{l+1}$ dont la seule solution est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 6. La suite (v_n), définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = -\frac{1}{v_n}$ peut-elle être convergente? Divergente vers l'infini?

Les deux exemples précédents se généralisent comme suit:

œ **Méthode.** (Méthode du point fixe pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.)
Soit (u_n) une suite vérifiant, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction **continue** sur un intervalle I - fermé ou semi-fermé - contenant tous les termes de la suite. Alors, **si** (u_n) converge vers une limite l, cette limite est solution de l'équation $f(l) = l$ (on dit que c'est un *point fixe* de f).

⚠ **Attention.** Cette méthode permet de trouver des limites **potentielles** mais ne prouve **en aucun cas** la convergence de la suite.

Par exemple, si la suite définie par $u_{n+1} = -u_n$ et $u_0 = 1$ avait une limite l, cette limite vaudrait 0 (c'est le seul point fixe de $f : x \to -x$), mais on voit tout de suite que $u_n = (-1)^n$ ne converge pas.

Proposition 7. (Comparaison à une suite divergente vers l'infini)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors,
(i) Si (u_n) diverge vers $+\infty$, il en est de même pour (v_n);
(ii) Si (v_n) diverge vers $-\infty$, il en est de même pour (u_n).

Exercice 7. (*)

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

(2) En déduire le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Proposition 8. (Théorème d'encadrement dit *des gendarmes.*)

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites telles que les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang;
- (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l.

Alors, (v_n) converge également vers l.

Exemple.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+5(-1)^n}{2n} = \frac{3}{2}$$

En effet,

$$\frac{3n-5}{2n} \leq \frac{3n+5(-1)^n}{2n} \leq \frac{3n+5}{2n},$$

et il est facile de voir que les deux suites qui encadrent le terme qui nous intéresse tendent toutes les deux vers $\frac{3}{2}$. Il suffit alors d'appliquer le résultat précédent.

Exercice 8. (*) Soient (v_n) une suite qui converge vers 0 et (u_n) une suite telle que $|u_n| \leq v_n$, à partir d'un certain rang. Montrer que (u_n) converge vers 0.

Application: Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

5.2 Critère de convergence monotone

Comme on l'a vu dans le section précédente, on peut souvent avoir des informations sur une limite si on sait **déjà** que la suite converge. Le théorème suivant donne un critère d'**existence**. Il ne donne en aucun cas la valeur de la limite. Il est constamment utilisé.

Théorème 1. *(Convergence monotone.)*
Toute suite croissance ***et*** *majorée est convergente.*
Toute suite décroissante ***et*** *minorée est convergente.*
Toute suite croissante ***et*** *non majorée diverge vers* $+\infty$.
Toute suite décroissante ***et*** *non minorée diverge vers* $-\infty$.

Exemple. (reprenant quelques questions du sujet de EDHEC 2012.)

On veut étudier la nature (et déterminer la limite éventuelle) de la suite (u_n) définie pars

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n^2+1}{2} \end{cases}$$

La fonction $f:\ x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ étant définie sur $\mathbb{R}$, la suite est bien définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Il est facile de voir que la suite est croissante: en effet

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq 0.$$

De plus, une récurrence immédiate permet de voir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$: c'est en effet vrai pour u_0, et si c'est vrai pour un certain $n \geq 0$, alors

$$0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{u_n^2+1}{2} < \frac{1^2+1}{2} \leq 1.$$

La suite étant croissante et majorée (par 1), elle est donc convergente. Notons alors l sa limite. Par passage à la limite dans les égalités, cette limite est un *point fixe* de f, *i.e.* l est solution de l'équation

$$\frac{l^2+1}{2} = l$$

dont la seule solution est 1. Ainsi, on peut conclure que (u_n) converge vers 1.

Parfois, connaître explicitement la limite est difficile et doit se contenter de son existence voire éventuellement d'un encadrement de celle-ci. C'est le cas dans l'exercice suivant.

Exercice 9. Soit (u_n), la suite définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

(1) Montrer que (u_n) est croissante.
(2) (a) Montrer que,

$$\forall k \geq 2, \qquad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

(b) En déduire que,

$$\forall n \geq 1, \qquad 1 \leq u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

(3) Conclure quant à la convergence de (u_n) et donner un encadrement de sa limite éventuelle.

Remarque 2. Il est possible de montrer, avec de très jolis outils qui ne sont pas au programme de la classe préparatoire ECE, que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5.3 Suites adjacentes

Définition 3. *(Suites adjacentes.)*
Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites ***adjacentes*** *si les quatre conditions suivantes sont* ***toutes*** *vérifiées:*

- *La suite (u_n) est croissante;*
- *La suite (v_n) est décroissante;*
- *Pour tout n, $u_n \leq v_n$;*
- *La différence $v_n - u_n$ tend vers 0, lorsque $n \to +\infty$.*

Théorème 2. *(Suites adjacentes.) Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.*

⚠ **Attention.** Comme dans d'autres résultats, le théorème précédent garantie l'existence de la limite l mais ne donne pas sa valeur. Cependant, on peut déduire des propriétés de monotonie des deux suites adjacentes que

$$\forall n, m, \qquad u_0 \leq u_n \leq l \leq v_m \leq v_0.$$

Exercice 10. À l'aide du Théorème des suites adjacentes, proposer une démonstration alternative à l'Exercice 9 pour montrer que la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

converge, et encadrer sa limite (indication: on introduira $v_n = u_n + \frac{1}{n}$).