Chapitre 4. Ensembles, Applications & Dénombrement

1 Ensembles

1.1 Généralités: ensembles et sous-ensembles

Définition 1. *Si $u_1, u_2, \ldots, u_p$ (p étant un entier ≥ 1) sont des objets mathématiques quelconques (par exemple des nombres réels mais éventuellements des fonctions ou des vecteurs...), alors on peut former l'**ensemble** :*

$$E = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}.$$

*On dit alors que chaque u_i (pour $1 \leq i \leq p$) est un **élément** de E, ou que u_i* appartient *à E, et on écrit :*

$$u_i \in E.$$

Si un objet x n'est pas un élément de l'ensemble E, on note $x \notin E$.

Exemple. Certains ensembles sont importants car on les utilise très souvent. On en a déjà introduits certains. Par exemple:

- l'ensemble vide, noté $\emptyset$. Il ne contient aucun élément;
- l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ des entiers naturels;
- l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, dont $0, -1, \sqrt{2}, e$ sont des éléments.

Mais on verra également dans les prochains chapitres que d'autres ensembles seront utilisés (et importants) comme

- l'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et m colonnes;
- l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$...

Dans les deux chapitres précédents, nous avons étudié les *suites réelles*, on peut alors introduire une notation pour l'ensemble de tels objets. Ainsi, il est courant de noter $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'ensemble des suites réelles.

⚠ Il est tout à fait possible de considérer un ensemble d'ensembles, comme

$$E = \{\{1; 2\}; \{1\}; \mathbb{N}\}.$$

Ici, les éléments de E sont eux-mêmes des ensembles. On fera donc attention à bien identifier le contexte dans lequel on se trouve.

☞ *Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.*

Remarque 1. L'ordre des éléments dans un ensemble, et leurs éventuelles répétitions n'importent pas. Par exemple:

$$\{1; 2\} = \{2; 1\} = \{1; 1; 2\}.$$

Définition 2. *Le **cardinal** d'un ensemble E est le nombre d'éléments qui le composent. On le note card(E) ou $\#E$. Il peut être fini ou infini.*

*Un ensemble de cardinal 1 s'appelle un **singleton** et un ensemble de cardinal 2 une **paire**.*

Définition 3. *Soient E et F deux ensembles. On dit que F est **inclus** dans E, ce qui s'écrit $F \subset E$, lorsque tout élement de F est aussi un élément de E:*

$$(F \subset E) \Longleftrightarrow (\forall x \in F,\ x \in E).$$

*Lorsque F est inclus dans E, on dit que F est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de E.*

Exercice 1. ✎Écrire, à l'aide de quantificateurs, le fait qu'un ensemble F **ne soit pas inclus** dans un ensemble E.

⚠ **Attention.** L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble.

Exercice 2. Vrai ou Faux?

(i) $\{1,1\} = \{1\}$
(ii) $2 \in \{\{2\}, 3, \{\{4\}\}, \emptyset\}$
(iii) $\{1\} = \{\{1\}\}$
(iv) $3 \in \emptyset$
(v) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(vi) $\{1\} \subset \{\{1\}\}$
(vii) $\emptyset \subset \{1\}$
(viii) $\{\{\{3\}\}\}$ a un élément
(ix) $\{n \in \mathbb{N},\ 82 \leq n \leq 99 \text{ et } \exists k \in \mathbb{N},\ n = k^2\} = \emptyset$

✎ **Méthode.** (Inclusion de deux ensembles).

Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, on fixe un élément quelconque x de A et on montre qu'il appartient aussi à B.

Exercice 3. Montrer que $A \subset B$, où

$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ 3 \leq x \leq 4\} \qquad \text{et} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} :\ x^3 - x^2 - x - 5 \geq 0\}.$$

Proposition 1. (*) Soient A, B et C trois ensembles. Alors

(i) $$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Longrightarrow (A \subset C).$$

(ii) $$(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Longleftrightarrow (A = B).$$

La proposition précédente permet en particulier d'établir la méthode suivante, pour montrer que deux ensembles sont égaux.

✎ **Méthode.** (Égalité de deux ensembles)

Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on peut procéder comme suit:

- Ou bien on peut écrire **en extension** (c'est à dire en donnant tous leurs éléments) les deux ensembles et on vérifie que ce sont les mêmes;
- Ou bien on procède par **double inclusion**:

$$(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B \textbf{ et } B \subset A).$$

C'est à dire qu'on commence par montrer que $A \subset B$ et ensuite, on montre que $B \subset A$.

Exercice 4. Montrer que $A = B$, où

$$A = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} :\ (u_n^2) \text{ converge et } \forall n \geq 0,\ u_n \geq 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} :\ (u_n) \text{ converge et } \forall n \geq 0,\ u_n \geq 0\}$$

Remarque 2. (Cardinal et Inclusion)

Il est clair que si $F \subset E$, alors $card(F) \leq card(E)$. On peut en déduire alors le résultat suivant, dont la démonstration est un petit exercice facile (mais instructif): si E et F sont deux ensembles avec un nombre fini d'éléments avec $F \subset E$ et si $card(F) = card(E)$, alors $E = F$.

Définition 4. *Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ **l'ensemble des parties** de E. Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont donc les parties de E.*

Exemple. Prenons $E = \{1; 2\}$. Cet ensemble, qui a deux éléments, admet quatre sous-ensembles qui sont: $\emptyset$ (qui ne contient pas d'élément), $\{1\}$ et $\{2\}$ (qui contiennent tous deux un élément) et E lui-même. Ainsi, on écrira

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset;\ \{1\};\ \{2\};\ \{1; 2\}\}.$$

Exercice 5. Expliciter les ensembles suivants :

(i) $\mathcal{P}(\emptyset)$
(ii) $\mathcal{P}(\{5\})$
(iii) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$
(iv) $\mathcal{P}(\{\{1\}\})$
(v) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

1.2 Opérations sur les ensembles

Définition 5. *Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors, on peut considérer les éléments de A qui ne sont pas dans B, cet ensemble se note $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ et se lit "A privé de B".*

Définition 6. *Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$.*

- *On appelle **intersection** de A et B, et on note $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B.*
- *On appelle **union** de A et B, et on note $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B.*

*Deux ensembles A et B tels que $A \cap B = \emptyset$ sont dits **disjoints**.*

⚠ **Attention.** Le "*ou*" de la définition de l'union est un "*ou*" **inclusif**. C'est à dire que pour construire $A \cup B$, on prend les éléments qui sont dans A, dans B et aussi ceux qui sont dans les deux! En particulier $A \cap B \subset A \cup B$.

Proposition 2. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Les propriétés suivantes sont toujours vraies:

(1) ... relatives à l'intersection
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap A = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(2) ... relatives à l'union
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup A = A$ et $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(3) ... relatives à intersection et l'union
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 6. Pour $A, B, C, D \in \mathcal{P}(E)$, simplifier l'expression

$$(A \cap B) \cup (C \cap D).$$

Proposition 3. Soient E un ensemble fini et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors,

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B).$$

Définition 7. *Soient E et I deux ensembles, et $(A_i)_{i \in I}$ une **famille** de sous-ensembles de E indexée par I (c'est à dire que, pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(E)$). On peut alors construire la réunion et l'intersection de tous les A_i:*

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I,\ x \in A_i$$

et

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I,\ x \in A_i.$$

Exemple. Considérons la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, définie par $A_n = [-n;n]$ (la famille étant indexée par $\mathbb{N}$, on parlera plutôt de suite d'ensembles). On a par exemple $A_0 = \{0\}$, $A_1 = [-1;1]$, etc... Il est alors facile de voir que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = 0.$$

Pour montrer chacune de ces égalités d'ensembles, on procède par double inclusion. Il est clair que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{R}$. Prenons maintenant $x \in \mathbb{R}$ et montrons que $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il suffit de trouver un entier naturel qui soit plus grand que x. Prenons alors $N_x = \lfloor x \rfloor + 1$. On a bien $x \in A_{N_x}$ et donc x est bien dans $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Pour l'autre égalité, il est également clair que $\{0\} = A_0 \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Soit alors $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Cela signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$ ou encore $-n \leq x \leq n$. La seule possibilité est donc que x soit égal à 0 et donc $x \in \{0\}$.

Exercice 7. Déterminer les intersections et réunions d'ensembles suivants:

$$(i)\ A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} \left[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right];\quad (ii)\ B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} \left]-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right[;\quad (iii)\ C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \left[\frac{1}{n};+\infty\right[;\quad (iv)\ \bigcup_{a\in\mathbb{R}^\star} \left]\frac{1}{a};+\infty\right[.$$

Définition 8. *Soient E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle* ***complémentaire de** A **dans** E *l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A:*

$$\complement_E(A) = \{x \in E :\ x \notin A\} = E \setminus A.$$

⚠ **Attention.** La notion de complémentaire d'un ensemble A dépend totalement de l'ensemble E. Lorsque le contexte est clair (**et uniquement dans ce cas**), on peut alléger la notation et la terminologie en parlant simplement de complémentaire de A et en le notant $\overline{A}$.

Proposition 4. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors

- $\overline{E} = \emptyset$; $\overline{\emptyset} = E$; $\overline{\overline{A}} = A$.
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; $A \cup \overline{A} = E$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Définition 9. *Soient E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une familles de parties non vides de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ forme une* ***partition*** *de E si:*

$$\begin{cases} \bigcup_{i\in I} A_i = E \\ \forall i \in I, \forall j \in I, \quad (i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \end{cases}$$

Exercice 8. Montrer que la famille (A_n) définie, pour $n \in \mathbb{Z}$ par $A_n = [n;n+1[$ forme une partition de $\mathbb{R}$.

Définition 10. *On appelle* ***produit cartésien*** *de n ensembles $E_1, E_2, \cdots E_n$ l'ensemble des $n-$uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tels que $x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, ...,\ x_n \in E_n$.*

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in E_i, i = 1, ..., n\}.$$

☞ *Le produit cartésien de n ensembles égaux à E se note simplement E^n.*

Exercice 9. À l'aide d'un dessin, exprimer simplement le produit $[0;2]^2 \cap [1;3]^2$.

2 Applications

2.1 Vocabulaire

La définition suivante a déjà été introduite dans le premier chapitre.

Définition 11. *Une* ***application*** *f est la donnée d'un ensemble E, appelé* ***ensemble de départ****, d'un ensemble F, appelé* ***ensemble d'arrivée****, et pour chaque élément x de E, d'un unique élément noté $f(x)$.*

*On dit que $f(x)$ est l'****image*** *de x par f. De plus, si y est un élément de F et que x est un élément de E qui vérifie $f(x) = y$, alors x est appelé* ***antécédent*** *de y par f.*
Une application f de E dans F se note ainsi:

$$f : \begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

Définition 12. *(Application identité)*
Soit E un ensemble. L'application définie sur E et qui à tout élément $x \in E$ associe le même élément x est appelée ***application identité*** *(ou tout simplement* ***identité****) de E. On la note*

$$\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{cases}$$

On introduit également les notations et la terminologie suivante. Il est capital de bien faire la distinction entre élément et ensemble et de manipuler tous les objets avec rigueur (et précaution).

Définition 13. *(Image directe et pré-image)*
Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.

- *On appelle* ***image directe*** *de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A. On note*
$$f(A) = \{y \in F : \exists\, x \in A,\ y = f(x)\}.$$
- *On appelle* ***pré-image*** *de B par f l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est dans B. On note*
$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

⚠ **Attention.** Il est capital d'avoir à l'esprit que les ensembles définis ci-dessus sont des ensembles. La notation de la pré-image est une notation et n'a rien à voir avec la bijection réciproque f^{-1} (qui sera définie ci-après) et qui peut tout à fait ne pas exister. On fera de plus bien la différence entre $f(x)$ et $f(\{x\})$ qui ne sont pas des objets du même type!

Exercice 10.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{2x} + e^x$.
  (a) Déterminer $f(\{0\})$.
  (b) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.
  (c) Montrer que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^\star$. A-t-on égalité? Justifier.
(2) Soit $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (n, m) \mapsto n(m-1)$.
  (a) Déterminer $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

Définition 14. *Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux application. La* ***composée*** *de f par g est l'application notée $g \circ f$ définie sur E et à valeurs dans G qui à un élément $x \in E$ associe $g(f(x))$.*

⚠ **Attention.** $f \circ g \neq g \circ f$!

Exercice 11. Dans chacun des cas, expliciter $g \circ f$.

(1) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1 + x)$;
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, t + 1, t^2)$.

2.2 Injections, Surjections, Bijections

Définition 15. *Soit f une application de E dans F. On dit que:*

- *f est **injective** si tout élément de F possède au plus un antécédent par f:*
$$\forall x_1,\, x_2 \in E,\; f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$
- *f est **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent par f:*
$$\forall x \in F,\, \exists\, x \in E \;:\; f(x) = y.$$
- *f est **bijective** si tout élément F possède un unique antécédent par f:*
$$\forall x \in F,\, \exists!\, x \in E \;:\; f(x) = y.$$
*L'application de F vers E qui à y associe x s'appelle la **bijection réciproque** de f. On la note f^{-1}.*

Remarque 3. On peut, à partir de la définition, remarquer les propriétés suivantes:

(1) L'application identité de tout ensemble E est toujours bijective.
(2) Une application f est bijective si elle est à la fois injective **et** surjective.
(3) Si $f : E \to F$ est bijective alors
$$\forall x \in E,\, \forall y \in F, \qquad (f(x) = y) \Longleftrightarrow (x = f^{-1}(y)).$$
(4) Si f est bijective de E dans F, on dira que f réalise une bijection de E sur F. Il est alors clair que f^{-1} réalise quant à elle une bijection de F sur E. De plus,
$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$
(5) Si $f : E \to F$ est bijective alors
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E.$$
(6) Si $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, on peut dire que f réalise une bijection de A sur B si et seulement si
   (i) $f(A) = B$;
   (ii) tout élément de B possède un unique antécédent x **dans** A.

Exemple. L'exponentielle est la bijection réciproque du logarithme néperien:
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\, \forall y \in \mathbb{R}, \qquad (\ln(x) = y) \Longleftrightarrow (x = e^y).$$

✎ **Méthode.** Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on peut parfois montrer que tout élément de l'espace d'arrivée possède un unique antécédent par f dans l'ensemble de départ de manière explicite (c'est à dire qu'on choisit $y \in F$ arbitraire et on explicite l'unique x (qui dépendra de y) tel que $f(x) = y$) ou bien (le plus souvent) on montre en deux temps qu'elle est injective et surjective.

- Pour la surjectivité: on prend un élément quelconque y dans l'ensemble d'arrivée et on montre qu'il existe un élément x dans l'ensemble de départ tel que $f(x) = y$.
- Pour l'injectivité: on part de deux éléments quelconques x et y de l'ensemble de départ vérifiant $f(x) = f(y)$ et on montre qu'on a nécessairement $x = y$.

Naturellement, pour infirmer l'une des deux propriétés, on peut fournir un contre-exemple.

Exercice 12. Les applications suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives? Dans le cas d'une bijection, expliciter la bijection réciproque.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto x^2 - 1$.
(2) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2,\; n \mapsto (n,\, (n+1)^2)$.
(3) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par
$$h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Proposition 5. (*) (Bijections et ensembles finis) Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F.

(1) Si f est bijective, alors $card(E) = card(F)$.
(2) Si $card(E) = card(F)$ **et si** f injective, alors f est bijective.
(3) Si $card(E) = card(F)$ **et si** f surjective, alors f est bijective.

Proposition 6. (*) (Composée de bijections) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est encore une bijection (de E sur G) et on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

3 Dénombrement

Dénombrer consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble donné (ou autrement dit, le nombre de possibilités d'une situation donnée). Pour ce faire, nous allons introduire plusieurs outils qui permettront d'obtenir ce décompte.

Tous les ensembles considérés dans cette section sont des **ensembles finis**. On commence par la proposition suivante.

Proposition 7. Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et m. Alors, $card(E \times F) = n \times m$. En particulier $card(E^d) = n^d$.

On en déduit le résultat suivant, extrêmement utile:

Proposition 8. Il y a n^d façons de choisir, en tenant compte de l'ordre (et en acceptant les répétitions), d fois un élément parmi n.

Exemple. Il y a 9^7 nombres à 7 chiffres qui ne comportent aucun 1. En effet, on doit choisir 7 fois consécutives un chiffre parmi 9 qui sont 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

3.1 Permutations

Définition 16. *Soit E un ensemble fini. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E.*

Exemple. Considérons $E = \{1; 2; 3\}$. L'application $\sigma : E \to E$ telle que $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 1$ est bien une bijection de E dans lui-même, c'est donc une permutation de E. On la note $\sigma = (1,\ 2,\ 3)$.

Proposition 9. Si $card(E) = n$, alors le nombre de permutations de E est $n!$.

Exercice 13. Déterminer toutes les permutations de $E = \{1; 2; 3\}$.

☞ *On utilise les permutations dans les problèmes où l'on veut **ordonner** tous les éléments d'un ensemble (sans répétition).*

Exemple. Le nombre de façons de placer 25 élèves de CPGE 1 sur les 25 chaises de la salle est le nombre de façons de permuter les 25 élèves sur les 25 chaises, c'est à dire 25! (ce qui est un nombre très grand!).

Exercice 14. Les 28 tomes d'une encyclopédie sont rangés sur une étagère.

(1) Quel est le nombre de rangements possibles?
(2) Quel est le nombre de rangements pour lesquels les tomes I et II apparaissent côte à côte et dans cet ordre sur l'étagère?
(3) Quel est le nombre de rangements pour lesquels les p premiers tomes ($1 \leq p \leq 28$) apparaissent côte à côte et dans le bon ordre?

3.2 Arrangements

Définition 17. *Un **arrangement** de E est une disposition ordonnée d'un certain nombre d'élements de E.*

Proposition 10. Si $card(E) = n$ et si $1 \leq k \leq n$, le nombre d'arrangements de k éléments de E se note A_n^k et vaut

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

☞ *On utilise les arrangements dans les problèmes où l'on veut **ordonner** k éléments d'un ensemble (sans répétition).*

Exemple. Le nombre de "mots" de trois lettres formés avec les lettres du mot "MATHS" est

$$A_5^3 = \frac{5!}{!} = \frac{120}{2} = 60.$$

Exercice 15. Douze étudiants participent à un concours de mathématiques. Combien y a-t-il de "podiums" possibles?

3.3 Combinaisons et coefficients binomiaux

Définition 18. *On appelle $k-$**combinaison** de E toute partie de E à k éléments. Le nombre de combinaisons de k élements d'un ensemble à n éléments se note $\binom{n}{k}$.*

☞ L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

Exemple. Prenons à nouveau $E = \{1; 2; 3\}$.

- Les combinaisons de 2 éléments de E sont $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$ et $\{2; 3\}$. On peut donc conclure que
$$\binom{3}{2} = 3.$$
- $\{2; 3\}$ et $\{3; 2\}$ sont deux combinaisons identiques.

Proposition 11. Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux** (cette terminologie sera justifiée dans un chapitre suivant). De plus:

(1) Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est aussi égal au nombre de façon de choisir k objets distincts parmi n objets donnés.
(2) Dans un *arbre binaire* (succès-échec), le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de chemins sur lesquels on obtient exactement k succès (et $n-k$ échecs) lors de n répétitions d'une expérience aléatoire de Bernoulli (ce qu'on reverra naturellement dans un prochain chapitre sur les probabilités).

Il apparaît alors important de trouver comment calculer explicitement chaque coefficient binomial en fonction de n et k. Toutes les formules suivantes sont à connaître et comprendre parfaitement, et sont capitales pour la suite, dans différents cadres d'application.

Proposition 12. (Quelques coefficients binomiaux particuliers) Pour tout entier n on a

$$\binom{n}{0} = 1; \qquad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Proposition 13. (Formule du coefficient binomial) Soient n un entier et $0 \leq k \leq n$. Alors,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Il n'est pas difficile d'obtenir cette formule à partir de celle sur le nombre d'arrangement: l'ordre n'intervenant pas pour les combinaisons (contrairement aux arrangements), si les k éléments d'une combinaison sont choisis, il y a $k!$ permutations de ces éléments pour obtenir tous les arrangements possibles. Ainsi,

$$k!\binom{n}{k} = A_n^k \iff \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Exemple. On retrouve bien $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\times 1!} = \frac{6}{2} = 3$.

La formule précédente permet en particulier d'établir des relations bien pratiques:

Proposition 14. (*) Soient n un entier et $0 \leq k \leq n$. Alors,

(Symétrie)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(Triangle de Pascal)
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Exercice 16. Combien de mains de quatre cartes à jouer (choisies parmi 32) existe-t-il? Parmi ces mains, combien contiennent la dame de coeur?

Exercice 17. Un ensemble E possède exactement 55 parties à deux éléments. Quel est le cardinal de cet ensemble?

3.4 Méthodologie du dénombrement

On conclue ce chapitre par un "point méthode" pour savoir comment dénombrer les possibilités offertes par une situation donnée, à l'aide des outils précédemment introduits.

✎ **On décompose la situation:**

- Si la situation à étudier peut se décrire en plusieurs cas **disjoints** (à l'aide par exemple d'un "ou bien" ou "soit"), alors le dénombrement peut s'obtenir en **ajoutant** les dénombrement de chacun des cas.

- Si la situation à étudier peut être décrite par plusieurs **étapes successives** ("puis", "et", ...) alors le dénombrement peut s'obtenir en **multipliant** les dénombrements de chacune des étapes.

- Il peut être parfois beaucoup plus simple de dénombrer l'ensemble complémentaire.

✎ **On dénombre chaque composante de la situation décomposée:**

- Si l'ordre intervient et si les répétitions sont autorisées, il y a n^d façons de choisir d fois successives un élément parmi n.

- Si l'ordre intervient mais que les répétitions ne sont pas autorisées, il y a A_n^d façons de ranger d éléments parmi n.

- Si l'ordre n'intervient pas et que le répétitions ne sont pas autorisées, il y a $\binom{n}{d}$ façons de choisir d éléments parmi n.

Exercice 18. On tire successivement, avec remise, 5 boules dans une urne qui en contient 3 noires et 4 blanches. Combien y a-t-il de tirages:

(1) en tout?
(2) comportant 3 noires et 2 blanches?
(3) comportant au plus une noire?
(4) comportant au moins deux noires?

✎ **Le principe des bergers.** Pour compter le nombre de moutons de son troupeau, un berger compte toutes les pattes et divise le total par 4.

Exemple. Si on veut dénombrer le nombre d'anagrammes du "mot" ELEVEN TWO[1], on se rend compte qu'il devient difficile de tenir compte du fait que ce mot contient trois fois la lettre E, qui ne sont a priori pas différentiables. On va donc dans un premier temps dénombrer les anagrammes du même mot pour lequel on va différencier les lettres E, en les nommant E_1, E_2 et E_3. Le mot $E_1LE_2VE_3N$ TWO admet 9! anagrammes (car il se compose de 9 *caractères*). Or, toute permutation des trois E (il y en a 3!) ne change finalement pas le mot. Finalement, il y a $\frac{9!}{3!}$ anagrammes de ELEVEN TWO.

Exercice 19. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot AVADAKEDAVRA ?

[1] On remarquera avec amusement qu'un des anagrammes de ELEVEN TWO est en fait TWELVE ONE (et les deux sommes font 13...).