ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 7. Polynômes

Ce chapitre traite de manière plus approfondie une famille de fonctions, que l'on a déjà rencontrée à de multiples reprises mais dont on présente certes propriétés spécifiques: les fonctions polynomiales.

1 Fonctions polynomiales

Définition 1. *Une fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite* ***polynomiale*** *s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (*)$$

Les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont alors les ***coefficients*** *de la fonction polynomiale P.*

☞ *On parle plus couramment de "polynôme" au lieu d'application polynomiale. L'ensemble des polynômes à coefficients réels se note $\mathbb{R}[X]$.*

☞ Afin de différencier le polynôme P de son expression algébrique $P(x)$ (où $x \in \mathbb{R}$), on pourra écrire parfois $P(X)$. Par exemple X représente la fonction polynomiale $x \mapsto x$, ou encore X^2+X+1 la fonction polynomiale $x \mapsto x^2 + x + 1$. Cette écriture est très utilisée pour des polynômes du type $X - \alpha$ comme on le verra ci-après.

Exemple. Plusieurs fonctions déjà rencontrées sont en fait des fonctions polynomiales:
- la fonction $x \mapsto 0$ est appelée le polynôme nul.
- les fonctions constantes sont polynomiales;
- plus généralement, les fonctions affines sont polynomiales;
- on a rencontré à de multiples reprises les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$;
- la fonction $x \mapsto x^3$ une fonction polynomiale.

☞ *Une fonction polynomiale P est (définie, continue et infiniment) dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée P' est encore une fonction polynomiale.*

Le résultat suivant a déjà été énoncé au cours du tout premier chapitre. Il concerne l'unicité des coefficients qui définissent la fonction polynomiale.

Proposition 1 (Unicité de l'écriture: **Principe d'identification**).
Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_p x^p$$

$$\iff$$

$$p = n \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0, n]\!], \quad a_i = b_i$$

Remarque 1. Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme. Si $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0$, alors tous les coefficients a_i sont nuls. C'est un cas particulier d'unicité de l'écriture d'un polynôme.

2 Degré d'un polynôme

Le résultat précédent est important. En plus de nous permettre des identifications dont on a déjà pu voir l'utilité, il nous permet de parler sans ambiguïté des coefficients d'une fonction polynomiale et de définir le *degré* d'une telle fonction.

Définition 2 (Degré d'un polynôme)**.**
*Soit $P : x \to a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ une fonction polynomiale. Si $a_n \neq 0$, on dit que P est de **degré** n. On note $\deg(P) = n$. Le degré d'un polynôme est donc le plus grand indice d'un coefficient non nul: tous les coefficients des puissances plus élevées le sont.*

☞ L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[X]$.
⚠ Par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.

Exemple. Les polynômes constants sont de degré 1. Les trinômes sont des polynômes de degré 2.

Exercice 1. Trouver tous les polynômes P de degré 2 tels que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P'(1) = 3$. Même question avec P de degré 3.

En appliquant la définition, il suit immédiatement la proposition suivante, établissant un lien entre le degré d'un polynôme et celui du polynôme dérivé.

Proposition 2. Soit P un polynôme non nul. Alors, $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

Exercice 2. Déterminer tous les polynômes P tels que $P'^2 = 4P$.

De plus, on peut faire des opérations sur les polynômes. Plus précisément, soient

$$P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et} \quad Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

deux fonctions polynomiales (avec $n \geq m$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

(i) λP est encore une fonction polynomiale, ses coefficients sont λa_k;

(ii) $P + Q$ est aussi une fonction polynomiale:

$$P + Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) x^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k$$

(iii) PQ est également une fonction polynomiale:

$$PQ : x \mapsto \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k$$

En particulier, en remarquant que $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_{m+n-k} = 0$ si $k < n$, le coefficient de degré $m + n$ vaut

$$\sum_{j=0}^{m+n} a_j b_{m+n-j} = a_n b_m \neq 0.$$

On en déduit notamment la proposition suivante.

Proposition 3.
Soient P et Q deux polynômes non nuls. Alors :

$$\deg(P + Q) = \max(\deg(P); \deg(Q)) \qquad \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

3 Racines d'un polynôme

Définition 3 (Racine d'un polynôme)**.**
Soit P une fonction polynomiale. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une ***racine*** *de P si $P(\alpha) = 0$.*

☞ On **sait** déterminer les racines des polynômes de degré 1 et 2.

Remarque 2. Il est facile de fabriquer une fonction polynomiale dont les racines sont données. Par exemple, une fonction polynomiale qui admet 1, 2, et 3 pour racines est :

$$(X-1)(X-2)(X-3) : \ x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)$$

On constate qu'en multipliant tout polynôme par le polynôme $X - \alpha$, on ajoute la racine α à l'ensemble des racines du polynôme. On se pose alors la question de la réciproque. Tout polynôme ayant pour racine α est-il un multiple du polynôme $X - \alpha$? La réponse est oui.

Proposition 4. Soit P une fonction polynomiale de degré $n \geqslant 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P. Alors il existe une fonction polynomiale Q, de degré $n-1$ telle que :

$$P = (X - \alpha)Q$$

☞ On dit que le polynôme $X - \alpha$ divise le polynôme P.

On peut donc factoriser chaque polynôme à l'aide de ses racines (éventuellement répétées).

Corollaire 1. Soit P un polynôme non nul. Alors, il existe r réels (non nécessairement distincts) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ et un polynôme Q **sans racine** tels que

$$P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_r)Q = \left(\prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i) \right) Q.$$

Remarque 3. On peut démontrer que le polynôme Q du corollaire peut s'écrire comme un produit de polynômes de degré deux, mais c'est beaucoup plus difficile.

Exemple. Factorisons le polynôme :

$$P : \ x \mapsto x^3 + x^2 - 2.$$

On voit que $x = 1$ est une racine "évidente" de P. Donc il existe un polynôme $Q = aX^2 + bX + c$ tel que :

$$P = (X-1)Q$$

On peut trouver Q par division euclidienne de P (voir méthode ci-dessous) par $X - 1$, ou par identification. On obtient, par l'une de ces deux méthodes,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ P(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$$

De telles factorisations sont très utiles, par exemple pour résoudre l'équation $P(x) = 0$, ou pour étudier le signe de $P(x)$.

Exercice 3. Factoriser les polynômes suivants et trouvez toutes leurs racines :

$$\begin{aligned} P &= X^3 + X^2 - X + 2 \\ Q &= X^4 + X^2 - 2 \end{aligned}$$

Exercice 4. Reprendre l'Exercice 1 sans contrainte sur le degré de P.

Les résultats de factorisation précédents combinés à un raisonnement sur le degré entraînent le théorème fondamental suivant.

Théorème 1. *Tout polynôme de degré n admet au plus n racines.*

Ainsi, un polynôme ne peut pas avoir davantage de racines que son degré. On en déduit le corollaire suivant très souvent utilisé pour obtenir des égalités à zéro, ou autres équations intéressantes.

Corollaire 2. Tout polynôme admettant une infinité de racines est identiquement nulle.

Exercice 5. Soient P et Q deux polynômes tel que $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Démontrer que $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (c.a.d. $P = Q$).

Exercice 6. On considère un polynôme P tel que

(i) $P(0) = 0$;
(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$.

(1) Donner un exemple simple d'un tel polynôme.
(2) On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^2 + 1$, pour $n \geq 0$.
  (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
  (b) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $P(u_n) = u_n$.
(3) Déterminer tous les polynômes P vérifiant (i) et (ii).

Le décompte des racines dans le théorème précédent autorise les différentes racines à être répétées et elles sont ainsi comptées le nombre de fois qu'elles apparaissent. Par exemple, $P = (X-1)^2(X-2) = (X-1)(X-1)(X-2)$ n'a que deux racines distinctes, mais trois racines si on autorise les répétitions: $1, 1, 2$. Afin de tenir compte de l'éventuelle répétition d'une racine, on introduit la notion de *multiplicité*.

Définition 4 (Multiplicité d'une racine). *Soient P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine de P de multiplicité m, si il existe un polynôme Q, tel que*

$$P = (X - \alpha)^m \cdot Q.$$

On peut alors réécrire le Corollaire 1 comme suit.

Corollaire 3. Soit P un polynôme. Il existe r réels $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q$ distincts et r nombres entiers $m_1, m_2, ..., m_p$ ainsi qu'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ sans racine tels que

$$P = \left(\prod_{k=1}^{r}(X - \alpha_i)^{m_i}\right) Q.$$

Enfin, on a un lien entre multiplicité d'une racine et dérivées successives d'un polynôme.

Proposition 5. Soit P un polynôme. Alors, α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si

$$\forall k \in [\![0; m-1]\!], \quad P^{(k)}(\alpha) = 0.$$

Exercice 7. Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $P(2) = P'(2) = 0$.

4 Division euclidienne des polynômes

Comme pour les entiers, on peut introduire une division *euclidienne* de polynômes.

✎ **Méthode.** Division euclidienne de polynômes Il est possible de poser des divisions euclidiennes entre polynômes. On ne va pas énoncer de résultat précis à ce sujet et on va se contenter de savoir le faire en pratique.

Faisons quelques rappels sur la division euclidienne des entiers. Si par exemple on divise 17 par 5, on dira que dans 17, il y a 3 fois 5 et qu'il reste 2. Ainsi le quotient est 3 et le reste est 2. On a

$$17 = 3 \times 5 + 2.$$

Avec les polynômes, c'est le même principe. On peut même poser la division comme à l'école primaire!

Posons la division euclidienne du polynôme $X^3 + X^2 - X + 1$ par $X^2 + 1$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +X^2 & -X & +2 & X^2+1 \\ \cline{5-5}
X^3 & & +X & & X+1 \\ \cline{1-4}
 & X^2 & -2X & +2 & \\
 & X^2 & & +1 & \\ \cline{2-4}
 & & -2X & +1 &
\end{array}
$$

Le reste de cette division euclidienne est $-2X+1$ et le quotient est $X+1$. On a donc la relation

$$X^3+X^2-X+2=(X^2+1)(X+1)-2X+1$$

Remarque 4. Lorsqu'on effectue la division euclidienne de deux polynômes, le reste est un polynôme dont le degré est **strictement inférieur** au degré du diviseur.

Exercice 8. Effectuer à chaque fois la division euclidienne de A par B:

(i) $A=X^3$ et $B=X^2+3$
(ii) $A=X^4-1$ et $B=X^2+1$
(iii) $A=X^5+X^3-X+1$ et $B=X+2$
(iv) $A=X+1$ et $B=X^2$

Exercice 9. Soient $P\in\mathbb{R}[X]$ et $a\in\mathbb{R}$. Exprimer, en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

Exercice 10 (Polynôme d'interpolation de Lagrange)**.**

Soient $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n$ des réels deux à deux distincts et $b_0,b_1,...,b_n$ d'autres réels. Le but de l'exercice est de trouver un polynôme P, de degré n, qui prennent les valeurs b_i aux points λ_i, c'est à dire

$$\forall i\in[\![0;n]\!],\quad P(\lambda_i)=b_i.$$

(1) Pour $i\in[\![0;n]\!]$, on introduit le polynôme

$$P_i=b_i\prod_{k\neq i}\frac{(X-\lambda_k)}{(\lambda_i-\lambda_k)}.$$

(a) Quel est le degré de chaque P_i?
(b) Que vaut $P_i(\lambda_j)$?
(c) Quel est le degré de $\sum_i P_i$?

(2) En déduire que

$$P=\sum_{i=0}^{n}b_i\prod_{k\neq j}\frac{(X-\lambda_k)}{(\lambda_i-\lambda_k)}.$$

(3) Trouver l'unique polynôme de degré 3 tel que $P(1)=2$, $P(-1)=3$, $P(2)=1$ et $P(0)=-1$.