ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 8. Fonctions réelles d'une variable réelle I - Continuité

Ce chapitre présente, en plus de résultats bien connus mais énoncés ici avec rigueur, les outils nécessaires à l'étude qualitative des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle, ainsi que des applications importantes (notamment pour l'étude des suites récurrentes ou implicites). Dans tout le chapitre, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f: I \to \mathbb{R}$.

1 Préliminaires : limites

Les définitions rigoureuses des limites pour les fonctions sont des versions analogues à celles pour les suites, introduites au Chapitre 2.

Beaucoup des résultats présentés dans cette section (voire dans tout le chapitre) intègrent des conditions qui doivent être vérifiées "au voisinage de x_0". L'étude des limites d'une fonction en un point est une étude **locale**, on s'intéresse à ce qu'il se passe *très proche* de ce point. Ainsi, les informations nécessaires ne concernent que la fonction "autour" de x_0. Un **voisinage** de x_0 est alors défini comme tout intervalle ouvert (de taille arbitrairement petite) contenant x_0 (on peut même ajouter la condition qu'il soit centré en x_0).

On considère donc $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0 (on inclut la possibilité que f ne soit pas définie en x_0).

Définition 1 (Limite finie en x_0)**.**
Soit l un nombre réel. Dire que f possède l pour limite en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l dès que x est suffisamment proche de x_0.

Traduction mathématique :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : \quad (\forall x \in I \ et \ |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Le nombre l s'appelle la limite de f en x_0. On note alors $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$.

Exemple.

(1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 1$ et $x_0 = 1$. Alors quand x se rapproche de 1, $f(x)$ se rapproche de $f(1) = 3$.

(2) Par contre, il ne faut pas penser qu'en général $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Un exemple simple nous est fourni par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

On constate que $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 \neq f(0)$.

Définition 2 (Limite infinie en x_0)**.**

(1) Dire que f possède $+\infty$ pour limite en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est suffisamment proche de x_0. On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.

TRADUCTION MATHÉMATIQUE :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0 : \quad (\forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

(2) Dire que f possède $-\infty$ pour limite en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi petit que l'on veut dès que x est suffisamment proche de x_0.

TRADUCTION MATHÉMATIQUE :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0 : \quad (\forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow f(x) \leqslant A$$

Exemple.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(|x|) = -\infty$

(2) Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{2 - x}$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$.

Il est possible que f ne soit pas définie "tout autour" de x_0, ou bien que son expression soit différente selon la position de x par rapport à x_0. Ainsi, on introduit la notion de limite à gauche ou à droite.

Définition 3 (Limite à gauche en x_0)**.**
Même définition mais en remplaçant « x est suffisamment proche de x_0 » par « x est suffisamment proche de x_0 et $x < x_0$ ».

Définition 4 (Limite à droite en x_0)**.**
Même définition mais en remplaçant « x est suffisamment proche de x_0» par « x est suffisamment proche de x_0 et $x > x_0$ ».

☞ Une fonction admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet *à la fois* une limite à droite et à gauche en x_0 et qu'elles sont *égales.*

Exemple.

(1) $\lim\limits_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$ et la fonction partie entière n'admet pas de limite en 1.

(2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$. On a alors

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty.$$

Définition 5 (Limite en $+\infty$)**.**
Même définition mais en remplaçant « x est suffisamment proche de x_0 » par « x est suffisamment grand ».

Définition 6 (Limite en $-\infty$)**.**
Même définition mais en remplaçant « x est suffisamment proche de x_0 » par « x est suffisamment petit ».

Exemple.

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

☞ Les conséquences graphiques de limites infinies en un point ou de limites finies à l'infini (asymptotes) on déjà été mentionnées au Chapitre 1 (ainsi que plus généralement l'étude des branches infinies). On pourra relire le paragraphe correspondant pour se rafraîchir la mémoire.

Résultats généraux sur les limites

Les tableaux regroupant les résultats concernant les opérations sur les limites (somme, produit, inverse, quotient) ont été donnés dans le tout premier chapitre et on choisit donc de les omettre ici (tout comme les limites usuelles de fonctions usuelles - y compris résultats de croissances comparées). En revanche, on énonce toute une série de résultats généraux importants.

Théorème 1. *Soient a, b et c des nombres réels ou $-\infty$ ou $+\infty$.*
f une fonction définie au voisinage de a et g une fonction définie au voisinage de b.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad \lim_{x\to a} g\circ f(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = c$$

Exemple.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{2x+4}{x+5}} = \sqrt{2}.$

Proposition 1 (Prolongement des inégalités)**.**
Soient f et g deux fonctions admettant toutes deux une limite en x_0 et telles que

$$\text{au voisinage de } a, \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Alors,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} g(x)$$

⚠ **Attention.** Si éventuellement, au voisinage de a, $f(x) < g(x)$, alors l'inégalité portant sur les limites reste large! Par exemple,

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ 1-\frac{1}{x} < 1 \quad \text{mais} \quad \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1.$$

Proposition 2 (Théorème d'encadrement dit *des gendarmes*)**.**
Soient f, g et h trois fonctions définies sur D telles que

$$\forall x \in D \quad f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x).$$

On suppose de plus que f et g admettent une limite finie en x_0 et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.
Alors la fonction h admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$.

Exemple.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x+1} = 1.$$

Proposition 3 (Théorème de comparaison)**.**
Soient f et g deux fonctions telles que

$$\text{au voisinage de } a \quad f(x) \leqslant g(x)$$

(i) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
(ii) Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Enfin, le dernier résultat établit un lien entre sens de variation et existence de la limite.

Théorème 2 (Théorème de la limite monotone)**.**
Si f est une fonction monotone sur $]a,b[$, avec a et b réels ou infinis, alors

- *f admet en tout point de l'intervalle $]a,b[$ une limite finie à droite et à gauche (non forcément égales);*
- *f possède une limite finie ou infinie en a et b.*

Plus précisément,

	f **croissante**	f **décroissante**
f **majorée**	f admet une limite finie en b^-	f admet une limite finie en a^+
f **non majorée**	$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
f **minorée**	f admet une limite finie en a^+	f admet une limite finie en b^-
f **non minorée**	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$

2 Continuité

2.1 Continuité en un point

Définition 7. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f est **continue** en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

☞ Si f n'est pas continue en x_0, on dit que f est **discontinue** en x_0 ou que x_0 est un **point de discontinuité** de f.

Définition 8. *Sous les même hypothèses que précédemment :*

- *On dit que f est **continue à gauche** en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.*
- *On dit que f est **continue à droite** en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.*

Proposition 4. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

(1) Si x_0 n'est pas une extrémité de I, alors on a l'équivalence :
f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_0.

(2) Si x_0 est l'extrémité gauche (resp. droite) de I, alors on a l'équivalence :
f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0.

Exercice 1.

(1) Étudier la continuité en 3 de la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si } x \in [0,3[\cup]3,+\infty[\\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 3 \end{cases} \end{array}$$

(2) Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

Définition 9. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et soit f définie sur $I \backslash \{x_0\}$. On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 lorsque f admet une limite finie en x_0. L'application*

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f} : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & si \quad x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

*est appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0.*

Remarque 1.

- La fonction $\tilde{f}$ est évidemment continue en x_0
- Par abus de notation, la fonction $\tilde{f}$ est parfois notée f.

- On définit de même la notion de prolongement à gauche et à droite.

Exercice 2.

(1) La fonction $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - 1}{x} \end{array} \right.$ est-elle prolongeable par continuité en 0?

(2) La fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \ln(x) \end{array} \right.$ est-elle prolongeable par continuité en 0?

(3) La fonction $h : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \end{array} \right.$ est-elle prolongeable par continuité en 0?

2.2 Continuité et limite des suites

La continuité d'une fonction en un point, précédemment définie à l'aide des quantificateurs, peut se reformuler à l'aide des suites. Dire qu'on se rapproche arbitrairement de a peut se faire à l'aide d'une suite dont la limite est a. Plus précisément, on a le résultat suivant:

Théorème 3 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.**
Soit f une fonction définie au voisinage de a. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue en a;
(ii) Pour toute suite numérique (a_n) (dont les termes appartiennent au voisinage de a à partir d'un certain rang) qui converge vers a, on a que la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(a)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

2.3 Continuité sur un intervalle. Opérations sur les fonctions continues

Définition 10. *On dit qu'une fonction f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point de I.*

Proposition 5 (Opérations sur les fonctions continues)**.** Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point x_0, élément d'un intervalle I.

(1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont continues en x_0 (resp. sur I), alors $f + g$, $f \times g$ et λf sont continues en x_0 (resp. sur I);
(2) Si f et g sont continues en x_0 et que $g(x_0) \neq 0$ (resp. continues sur I et que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$), alors $1/g$ et f/g sont continues en x_0 (resp. sur I).
(3) Si f est continue en x_0 et que g est (définie au voisinage de et) continue en $f(x_0)$, alors, $g \circ f$ est continue en x_0.

Le dernier point de la proposition précédente est un cas particulier du résultat plus général suivant:

Proposition 6. Si f est continue sur un intervalle I et si g est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

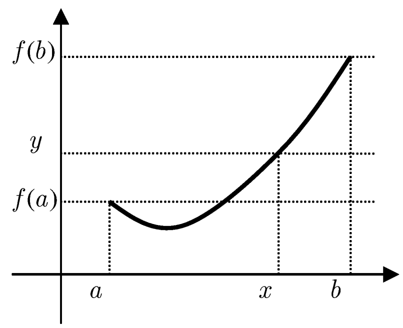
Exemple. La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1 + x^2) \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

2.4 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 4 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
Soient a et b des réels tels que $a < b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$.
Si f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = y$.



☞ L'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

Corollaire 1. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle; si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

⚠ **Attention.** Les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas nécessairement de même nature. Par exemple, si f est la fonction définie par $f(x) = 1/(1+x^2)$, alors $f(\mathbb{R}) =]0;1]$.

Proposition 7.
(1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Si f est continue sur $[a;b]$ telle que $f(a) \times f(b) \leqslant 0$ alors f s'annule au moins une fois sur $[a;b]$.
(2) Toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Montrer que l'équation $xe^x = 1$ admet (au moins) une solution dans l'intervalle $[0;1]$.

On a vu que, de manière générale, la continuité ne préservait pas la nature d'un intervalle. Si cet intervalle est fermé borné, c'est par contre le cas.
Un **segment** est un intervalle fermé borné, c'est à dire un intervalle de la forme $[a;b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Proposition 8. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment; si f est continue sur un segment $[a;b]$, alors $f([a;b]) = [m;M]$ est un segment.

⚠ Les extrémités du segment image ne sont pas forcément les images des extrémités de $[a;b]$.

Proposition 9.
(1) Si f est une fonction continue et croissante sur un segment $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
(2) Si f est une fonction continue et décroissante sur $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.

☞ Dans la Proposition 8, m est le minimum de la fonction sur $[a;b]$ et M son maximum. On note

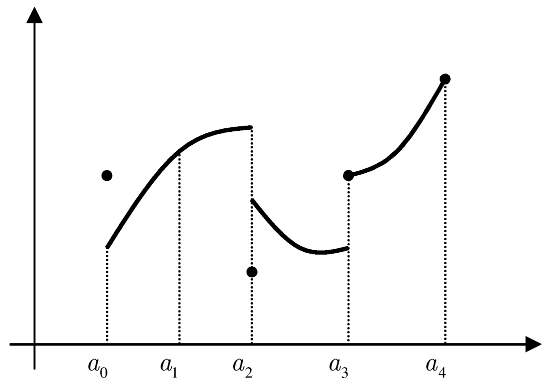
$$m = \min_{[a;b]} f \quad \text{et} \quad M = \max_{[a;b]} f.$$

Théorème 5. *Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes.*

2.5 Fonctions continues par morceaux

Définition 11. *Une fonction f est dite continue par morceaux sur le segment $[a;b]$ si il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < ... < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i;a_{i+1}[$ admette un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i;a_{i+1}]$. Plus précisément, si*

- *f est continue sur chaque $]a_i; a_{i+1}[$;*
- *f admet une limite à droite et à gauche (non nécessairement égales et potentiellement distinctes de la valeur de f) en chaque a_i.*



☞ Les fonctions "en escalier" (et notamment la fonction partie entière) sont des fonctions continues par morceaux.

Proposition 10. Soient $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, λf, $f + g$, fg et $|f|$ sont continues par morceaux.

Exercice 5. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que f est bornée sur $[a; b]$.

2.6 Théorème de la bijection

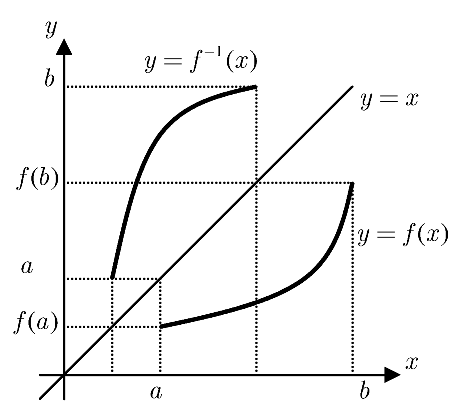
Proposition 11. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Si la fonction f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Exercice 6. Montrer que l'équation $x^3 + x = 3$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1, 2]$.

Théorème 6 (de la bijection)**.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application ***continue*** *et* ***strictement monotone*** *sur I. Alors, f réalise une bijection de I sur son image $f(I)$. En particulier,*

- *$f(I)$ est un intervalle, noté J*
- *$f : I \to J$ est une bijection de I sur J*
- *$f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f.*
- *$f^{-1} : J \to I$ est continue de J sur I.*

☞ Les graphes de f et f^{-1} sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $\Delta : y = x$.



Exercice 7. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{2x^2}{1+x}$$

(1) Démontrez que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que vous expliciterez.
(2) Soit $g : J \to [0, +\infty[$ l'application réciproque de f. Dressez le tableau de variation de g en précisant les limites de g aux bornes de J.
(3) Etudiez la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

2.7 Application: Étude des suites implicites

Comme on l'a vu au cours du Chapitre 2 (et dans quelques exercices), une suite peut être définie implicitement, c'est à dire comme solution d'une certaine équation. Le théorème de la bijection permet d'étudier (et d'assurer l'existence des termes) de telles suites.

Exercice 8. (D'après **Ecricome 1996**)
On considère l'équation $(E_n) :\ \ln(x) + x = n$ et la fonction $f :\ x \mapsto \ln(x) + x$.
(1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, (E_n) admet une unique solution x_n. Montrer alors que la suite (x_n) est strictement croissante.
(3) (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln(x) < x$.
(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{n}{2} \leq x_n \leq n$.
(c) En déduire la limite de la suite (x_n).
(4) Montrer que $\dfrac{\ln(x_n)}{n} \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$. En déduire que $\dfrac{x_n}{n} \longrightarrow 1$, $n \to +\infty$.