Interro Express n°1 - Sujet A

Solution

Exercice.

(1) Pour chacune des séries suivantes, on travaille sur le terme général:

$$(i)\ \frac{(-1)^{n+1}}{3\times 4^n} = \frac{-1}{3}\times\left(\frac{-1}{4}\right)^n$$

et il s'agit donc du multiple du terme général d'une série géométrique de raison $-1/4$ donc convergente. Ainsi, la première série converge et on peut calculer sa somme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3\times 4^n} &= \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n\\ &= \frac{-1}{3}\frac{1}{(1+\frac{1}{4})} = \frac{-1}{3}\times\frac{4}{5}\\ &= \frac{-4}{15}.\end{aligned}$$

$$(ii)\ \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(-\frac{1}{n}\ln(n)\right)\longrightarrow 1,\ n\to+\infty$$

ainsi le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement. On pouvait aussi éventuellement écrire que, comme $1/n\leq 1$,

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}\geq\frac{1}{n}$$

et par comparaison avec la série harmonique, tous les termes étant positifs, la série diverge. Mais l'argument du terme général ne tendant pas vers 0 est clairement le plus direct et le plus naturel.

$$(iii)\ \frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et ce découpage permet de faire apparaître deux sommes télescopiques. On calcule la somme partielle d'ordre N:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) &= \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &= 1-\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{1}{\sqrt{N+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &\longrightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2},\ N\to+\infty.\end{aligned}$$

La suite des sommes partielles ayant une limite finie, la série converge et sa somme vaut

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

(2) On cherche à montrer la convergence (et à la calculer la somme) de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}$.

(a) Pour trouver $\alpha\in\mathbb{R}$, on développe et on identifie les coefficients. On trouve rapidement

$$X^3 = X(X-1)(X-2)+\alpha X(X-1)+X \Longleftrightarrow \alpha = 3.$$

(b) On peut alors décomposer le terme général:

$$\frac{n^3}{n!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}+\frac{3n(n-1)}{n!}+\frac{n}{n!}$$

Or, les factorielles se simplifient et on retrouve une combinaison de trois séries de terme général $1/n!$ qui convergent. La série est donc convergente et on calcule sa somme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n(n-1)}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!}\\
&= \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3n(n-1)}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}\\
&= \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n-3)!}+3\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}+3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\\
&= e+3e+e\\
&= 5e.
\end{aligned}$$

Interro Express n°1 - Sujet B

Solution

Exercice.

(1) Pour chacune des séries suivantes, on travaille sur le terme général:

$$(i)\ \frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}} = 2n\left(\frac{-1}{7}\right)^{n-1}$$

et on reconnait un multiple de la première dérivée d'une série géométrique de raison $-1/7$ qui converge. Ainsi, cette première série converge et on peut calculer sa somme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}} &= 2\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{-1}{7}\right)^{n-1}\\ &= 2\frac{1}{\left(1+\frac{1}{7}\right)^2}\\ &= 2\times\frac{49}{64}\\ &= \frac{49}{32}.\end{aligned}$$

$$(ii)\ \frac{n^2-2}{n!} = \frac{n(n-1)+n-2}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!}+\frac{n}{n!}-\frac{2}{n!}$$

et on retrouve, via simplification des factorielles, des combinaisons de séries de terme général égal à $1/n!$, donc cette série converge également. On calcule alors sa somme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-2}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n!}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n!}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n!}\\ &= e+e-2e\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(iii)\ n\ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) &= n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \sqrt{n}\times\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)\\
&\longrightarrow +\infty,\ n\to+\infty
\end{aligned}
$$

et la série diverge donc grossièrement.

(2) On cherche à montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

(a) On multiplie par l'expression conjuguée:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\\
&= \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}
\end{aligned}
$$

Or,

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\geq\sqrt{n}\quad\text{donc}\quad\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$$

et on a bien

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\leq\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{3/2}}$$

(b) Tous les termes de la série sont positifs et $\sum n^{-3/2}$ est une série de Riemann convergente, donc, par critère de comparaison, notre série converge elle aussi.