Interro Express n°2 - Sujet A

Solution

Exercice 1. Pour que l'application P définisse bien une probabilité sur $\mathbb{N}$, il faut choisir λ tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda n^2(-2)^n}{n!} = 1.$$

Pour calculer cette somme, on utilise l'astuce déjà rencontrée qui consiste à écrire $n^2 = n(n-1)+n$ ce qui permettra une simplification avec la factorielle au dénominateur.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2(-2)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n(n-1)(-2)^n}{n!} + \frac{n(-2)^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)(-2)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-2)^n}{n!} \\
&= (-2)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-2)^{n-2}}{(n-2)!} + (-2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= 4e^{-2} - 2e^{-2} \\
&= 2e^{-2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda n^2(-2)^n}{n!} = 1 \iff \lambda \times 2e^{-2} = 1 \iff \lambda = \frac{e^2}{2}.$$

Exercice 2.

(1) En notant A l'évènement "le charmant voyageur est contrôlé au moins une fois au cours de tous ses trajets", on cherche à montrer que $P(A) = 1$. Or, A peut s'écrire à l'aide des A_n:

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

On constate d'ailleurs que la suite d'évènements (A_n) est croissante (au sens de l'inclusion). Si on est contrôlé au moins une fois lors des n premiers trajets, on l'est *a fortiori* également au cours des $n+1$ premiers trajets. Par limite monotone,

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n).$$

Pour calculer $P(A_n)$, il vaut mieux passer par l'évènement contraire (on est jamais contrôlé au cours des n premiers trajets). Comme, à chaque trajet, on est contrôlé avec probabilité p, on ne le sera pas avec probabilité $1-p$. Donc, $P(A_n) = 1 - P(\overline{A}_n) = 1 - (1-p)^n$. Il suit que

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} (1 - (1-p)^n) = 1 - \lim_{n \to +\infty} (1-p)^n = 1,$$

car $(1-p)^n \longrightarrow 0,\ n \to +\infty$ car $0 < 1-p < 1$. On a bien le résultat attendu.

(2) Notant B l'évènement "On fraude à tous les trajets jusqu'au premier contrôle", il est nécessaire d'introduire des évènements B_n précisant quand ce premier contrôle a lieu. Soit donc B_n "le premier contrôle intervient au $n-$ième trajet et on a fraudé au cours des n premiers trajets". Par indépendance,

$$P(B_n) = (1-p)^{n-1} \times p \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{p}{3} \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1}.$$

Or, $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ et les évènements sont deux à deux incompatibles, donc

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) \\ &= \frac{p}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{p}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{1-p}{3}}\right) \\ &= \frac{p}{p+2}. \end{aligned}$$

Interro Express n°2 - Sujet B

Solution

Exercice 1. Pour que l'application P définisse bien une probabilité sur $\mathbb{N}$, il faut choisir λ tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda n 3^{n+1}}{n!} = 1.$$

On a déjà calculé dix mille fois ce type de somme.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n 3^{n+1}}{n!} &= 3^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n 3^{n-1}}{n!} \\
&= 9 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n 3^{n-1}}{n!} \\
&= 9 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= 9e^3
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda n 3^{n+1}}{n!} = 1 \iff \lambda \times 9e^3 = 1 \iff \lambda = \frac{e^{-3}}{9}.$$

Exercice 2.

(1) En notant B l'évènement "le Professeur José n'arrive jamais en retard", on cherche à montrer que $P(B) = 0$. Or, B peut s'écrire à l'aide des B_n:

$$B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

On constate d'ailleurs que la suite d'évènements (B_n) est décroissante (au sens de l'inclusion). Si on est arrivé à l'heure les $n+1$ premiers matins, on l'est en particulier aussi les n premiers. Par limite monotone,

$$P(B) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n).$$

Comme, chaque matin, La probabilité d'être à l'heure est $9/10$, $P(B_n) = (9/10)^n$. Il suit que

$$P(B) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0,$$

car $0 < 9/10 < 1$. On a bien le résultat attendu.

(2) Notant A l'évènement "José 'noublie jamais ses notes jusqu'à son premier retard", il est nécessaire d'introduire des évènements A_n précisant quand ce premier retard a lieu. Soit donc A_n "le premier retard a lieu le $n-$ième matin et José n'a pas oublié ses notes au cours de ces n matins". Notons que chaque matin, José n'oublie pas ses notes avec probabilité $1-p$. Par indépendance,

$$P(A_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \times \frac{1}{10} \times (1-p)^n = \frac{1-p}{10} \times \left(\frac{9(1-p)}{10}\right)^{n-1}.$$

Or, $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et les évènements sont deux à deux incompatibles, donc

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \\ &= \frac{1-p}{10} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9(1-p)}{10}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1-p}{10} \left(\frac{1}{1-\frac{9(1-p)}{10}}\right) \\ &= \frac{1-p}{9p+1}. \end{aligned}$$