

## Interro Express n°3 - Sujet A

*Solution*

### Exercice 1.

(1) Par définition de  $f$  sur les vecteurs de la base canonique, on trouve immédiatement

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) On a les équivalences

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 3y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, le noyau de  $f$  est réduit au vecteur nul. Ceci caractérise l'injectivité de l'endomorphisme. Mais un endomorphisme injectif est aussi bijectif, et en particulier surjectif.

(3) (a)

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff Au = u \\ &\iff \begin{cases} 3y + 2z = x \\ -2x + 5y + 2z = y \\ 2x - 3y = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \\ &\iff u = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En posant  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , on a alors un vecteur qui engendre  $E_1$  et qui en est donc une base. On procède de la même façon pour  $E_2$ :

$$\begin{aligned}
u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 &\iff Au = 2u \\
&\iff \begin{cases} 3y + 2z = 2x \\ -2x + 5y + 2z = 2y \\ 2x - 3y = 2z \end{cases} \\
&\iff 2x - 3y - 2z = 0 \\
&\iff u = \begin{pmatrix} 3y + z \\ 2y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on obtient une base de  $E_2$ .

- (b) Il suffit, pour montrer qu'elle forme une base de  $\mathbb{R}^3$ , de vérifier que la famille  $\mathcal{C} = \{u, v, w\}$  est libre. Soient alors  $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda u + \mu v + \gamma w = 0$ . Alors,

$$\begin{aligned}
\lambda u + \mu v + \gamma w = 0 &\iff \begin{cases} \lambda + 3\mu + \gamma = 0 \\ \lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + \gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases},
\end{aligned}$$

et la famille est bien libre.

- (c) Par définitions des sous-espaces  $E_1$  et  $E_2$ , on obtient

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et on a *diagonalisé* l'endomorphisme  $f$ .

## Interro Express n°3 - Sujet B

*Durée : 35 minutes*

### Exercice 1.

(1) Par définition de  $f$  sur les vecteurs de la base canonique, on trouve immédiatement

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) On a les équivalences

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) &\iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 3x - z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ -x + 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, le noyau de  $f$  est réduit au vecteur nul. Ceci caractérise l'injectivité de l'endomorphisme. Mais un endomorphisme injectif est aussi surjectif, et en particulier surjectif.

(3) (a)

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 &\iff Au = 2u \\ &\iff \begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x + 4y + 2z = 2y \\ -x + 3z = 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \\ &\iff u = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En posant  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on a alors un vecteur qui engendre  $E_2$  et qui en est donc une base. On procède de la même façon pour  $E_4$ :

$$\begin{aligned}
u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 &\iff Au = 4u \\
&\iff \begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \\
&\iff x + z = 0 \\
&\iff u = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on obtient une base de  $E_4$ .

- (b) Il suffit, pour montrer qu'elle forme une base de  $\mathbb{R}^3$ , de vérifier que la famille  $\mathcal{C} = \{u, v, w\}$  est libre. Soient alors  $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda u + \mu v + \gamma w = 0$ . Alors,

$$\begin{aligned}
\lambda u + \mu v + \gamma w = 0 &\iff \begin{cases} \lambda - \gamma = 0 \\ -2\lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases},
\end{aligned}$$

et la famille est bien libre.

- (c) Par définitions des sous-espaces  $E_2$  et  $E_4$ , on obtient

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

et on a *diagonalisé* l'endomorphisme  $f$ .