ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interro Express n°4 - Sujet A

Durée : 35 minutes

Exercice 1. *Les questions sont indépendantes*

(1) On intègre par parties

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x t(e^t + e^{-t})\mathrm{d}t \\ &= [t(e^t - e^{-t})]_0^x - \int_0^x (e^t - e^{-t})\mathrm{d}t \\ &= x(e^x - e^{-x}) - [e^t + e^{-t}]_0^x \\ &= x(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) - 2. \end{aligned}$$

(2) En posant $u = \phi(t) = \ln(t)$, on obtient $\phi'(t)dt = dt/t = du$. Ainsi,

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+\ln(t)}} \\ &= \int_{\ln(1)}^{\ln(e)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u}} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{1+u}} \\ &= 2\left[\sqrt{1+u}\right]_0^1 \\ &= 2\left(\sqrt{2}-1\right). \end{aligned}$$

Exercice 2.

(1) Pour tout réel x, $e^x \geq 1 + e^x$, ainsi, par passage à l'inverse,

$$\frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1/(1+e^{nt}) \geq 0$, donc par positivité de l'intégrale, on a $u_n \geq 0$. De plus, en appliquant l'inégalité précédente

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{1+e^{nt}} \\ &\leq \int_0^n e^{-nt}\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-nt}}{n}\right]_0^n \\ &= \frac{1-e^{-n^2}}{n}. \end{aligned}$$

On a donc l'encadrement

$$0 \leq u_n \leq \frac{1-e^{-n^2}}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Par le théorème des gendarmes, on peut conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Interro Express n°4 - Sujet B

Durée : 35 minutes

Exercice 1. *Les questions sont indépendantes*

(1) Le degré 2 du polynôme devant l'exponentielle nous indique qu'il va nécessiter deux intégrations par parties successives pour venir à bout de cette petite intégrale.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x (t^2 - t + 1)e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= [-(t^2 - t + 1)e^{-t}]_0^x + \int_0^x (2t-1)e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= 1 - (x^2 - x + 1)e^{-x} + [-(2t-1)e^{-t}]_0^x + \int_0^x 2e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= 1 - (x^2 - x + 1)e^{-x} - 1 - (2x-1)e^{-x} + [-2e^{-t}]_0^x \\ &= (-x^2 - x - 2)e^{-x} + 2. \end{aligned}$$

(2) En posant $u = \phi(t) = \ln(t)$, on obtient $\phi'(t)dt = dt/t = du$. Ainsi,

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \frac{\ln(t)}{t\,(1-\ln(t)^2)}\mathrm{d}t \\ &= \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} \frac{u}{1-u^2}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)} \frac{-2u}{1-u^2}\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{2}\left[\ln(1-u^2)\right]_0^{\ln(2)} \\ &= -\frac{\ln(1-\ln(2)^2)}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

(1) Par concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ (définie sur $]-1;+\infty[$), sa courbe représentative est au dessous de sa tangente au point d'abscisse 0 qui a pour équation $y = x$, donc $\ln(1+x) \leq x$.

(2) Pour tout $t \in [0;1]$, $1 + t^n \geq 1$ et donc $\ln(1+t^n) \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, $u_n \geq 0$. De plus, grâce à l'inégalité précédente

$$u_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit l'encadrement,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par le théorème des gendarmes, on peut conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$