Interro Express n°5 - Sujet A

Solution

Exercice 1. Pour $n \geq 2$ entier, on pose

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} \mathrm{d}x.$$

(1) Soit $n \geq 2$. Les deux fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto 1/x^n$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1; +\infty[$, on peut procéder par intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^n} \mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} \right]_1^A + \frac{1}{n-1} \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x^n} \\
&= -\frac{\ln(A)}{(n-1)A^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \right]_1^A \\
&= -\frac{\ln(A)}{(n-1)A^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2 A^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)^2} \\
&\longrightarrow \frac{1}{(n-1)^2}, A \to +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, toutes les intégrales sont bien convergentes et, pour tout $n \geq 2$,

$$I_n = \frac{1}{(n-1)^2}.$$

(2) On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = \begin{cases} 9\frac{\ln(x)}{x^4}, & \text{si } x \geq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) On observe immédiatement que f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ ($\ln(x) \geq 0$ si $x \geq 1$). De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, elle est constante donc continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $[1; +\infty[$ (comme quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas). Et

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 0 = f(1).$$

Enfin, d'après la question préliminaire avec $n = 4$, on constante que l'intégrale de f sur $]-\infty; +\infty[$ est convergente et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 9 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^4} \mathrm{d}x = 9 \times \frac{1}{(4-1)^2} = 1.$$

Par un théorème du cours, on peut donc affirmer que f est une densité de probabilité. Notons alors X la variable aléatoire correspondante.

(b) Par définition,

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x)\mathrm{d}x.$$

Il est clair que, si $t < 1$, alors $F_X(t) = 0$. Soit donc $t \geq 1$, on réutilise l'IPP de la première question

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{t} f(x)\mathrm{d}x \\ &= 9\int_{1}^{t} \frac{\ln(x)}{x^4}\mathrm{d}x \\ &= 9\left(-\frac{\ln(t)}{3t^3} - \frac{1}{9t^3} + \frac{1}{9}\right) \\ &= 1 - \frac{3\ln(t)+1}{t^3}. \end{aligned}$$

Au final,

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 \\ 1 - \dfrac{3\ln(t)+1}{t^3}, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

(c) X admet une espérance (resp. une variance) si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\mathrm{d}x \quad \left(\text{resp. } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x\right)$$

converge. D'après la définition de f et la toute première question de l'exercice, les deux intégrales ci-dessus sont convergentes et par conséquent X admet une espérance et une variance. De plus;

$$E(X) = 9\int_{1}^{+\infty} x\frac{\ln(x)}{x^4}\mathrm{d}x = 9I_3 = \frac{9}{4}$$

et

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 9I_2 - (9I_3)^2 = \frac{63}{16}.$$

Interro Express n°5 - Sujet B

Durée : 30 minutes

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^x}{(1+e^x)^2}.$$

(1) Il y a plusieurs façons de montrer la convergence des intégrales J_n. On peut en effet utiliser une comparaison à l'infini, en remarquant (par croissance comparée) que

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \times \frac{x^n e^x}{(1+e^x)^2} = 0$$

et donc, il existe $M \geq 0$, tel que, pour tout $x \geq M$,

$$\frac{x^n e^x}{(1+e^x)^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

et le membre de droite est une fonction dont l'intégrale entre 1 et l'infini (et *a fortiori* entre M et l'infini) converge (critère de Riemann). Ou bien, on peut aussi remarquer que

$$\frac{x^n e^x}{(1+e^x)^2} \leq \frac{x^n e^x}{e^{2x}} = x^n e^{-x},$$

ce qui s'intègre facilement sur $[0; +\infty[$ en exhibant une relation de récurrence grâce à une intégration par parties (exercice déjà fait en classe). L'embarras du choix donc.

(2) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = 1 - \frac{1}{1+e^x}.$$

(a) On constate que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur ne s'annulant jamais. De plus, la fonction F est même $\mathcal{C}^1$ partout sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

est positive, donc F est croissante. Elle admet clairement des limites en $\pm\infty$. En effet, comme $e^x \to +\infty$, $x \to +\infty$, par composition des limites, on a

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 - 0 = 1;$$

Par un théorème du cours, F est alors la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire X.

(b) Toute fonction g qui coïncide avec f sauf en un nombre fini de points est une densité de X. Mais, on ne va pas se compliquer la vie et on choisit de prendre f comme densité. Une densité de X est donc f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

(c) X admet une espérance (resp. une variance) si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) \mathrm{d}x \quad \left(\text{resp. } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x\right)$$

converge. Encore une fois, il y a tout un tas de justifications, en utilisant bien sûr la toute première question de l'exercice. La plus courte est de remarquer que la fonction

$$x \longmapsto \frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2}$$

est paire. Ainsi, la convergence de son intégrale sur $]-\infty;+\infty[$ se résume à celle sur $[0;+\infty[$, ce qu'on sait être vrai par convergence de J_2 à la question 1. Ainsi, X admet un moment d'ordre 2 et donc également un moment d'ordre 1, ou encore X admet une espérance et une variance.

(3) *Bonus.* En posant $u = e^x$, on a alors $\mathrm{d}u = e^x \mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} &= \int_0^A \frac{e^x \mathrm{d}x}{e^x(1+e^x)} \\
&= \int_1^{e^A} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)} \\
&= \int_1^{e^A} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) \mathrm{d}u \\
&= \ln(e^A) - \ln(1) - \ln(1+e^A) + \ln(2) \\
&= \ln\left(\frac{e^A}{1+e^A}\right) + \ln(2) \\
&\longrightarrow \ln(2),\ A \to +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \ln(2).$$

Ceci permet, mais ce n'était pas demandé, de calculer l'espérance de X, à l'aide d'une intégration par parties...