ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Cahier de Vacances. Niveau I

Ce premier cahier de vacances propose aux élèves qui ont eu des difficultés au cours de l'année de faire un premier point sur les notions abordées cette année et de s'entraîner en calcul.

1 Calcul de dérivées (Mieux vaut tard que jamais)

Donner l'expression des dérivées des fonctions suivantes, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

$$f_1(x) = x + e^x; \quad f_2(x) = \sqrt{x} + 2x; \quad f_3(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-3}; \quad f_4(x) = x^2 e^x$$

$$f_5(x) = x\ln(x) - x; \quad f_6(x) = (2x+3)^3; \quad f_7(x) = \ln\left(x^2+1\right); \quad f_8(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$$

$$f_9(x) = \frac{x-e^x}{x}; \quad f_{10}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right); \quad f_{11}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

2 Matrices

Exercice 1. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Montrer que

$$\forall n \geqslant 0, \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad J^n = 4^{n-1} J$ où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et $B = A - 2I$. Calculer B^2 puis montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad A^n = 2^n Id + n2^{n-1} B$.

Exercice 5. (**Matrices et suites à récurrence linéaire d'ordre 2**).

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer A^2. Expliciter α et β tel que $A^2 = \alpha A + \beta Id$
(2) Montrer par récurrence qu'il existe a_n et b_n tels $A^n = a_n A + b_n Id$
(3) Expliciter a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
(4) Montrer que a est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter a_n en fonction de n.
(5) En déduire l'expression de b_n (on exprimera b_n en fonction de a_n et a_{n+1}).
(6) Déterminer tous les coefficients de la matrice A^n

3 Probabilités et suites

Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an. Pour chaque plante ,la première année, la probabilité de donner une fleur rose vaut $\frac{3}{4}$, la probabilité de donner une fleur blanche vaut $\frac{1}{4}$. Puis les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- si l'année n, la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$ elle donnera une fleur rose.
- si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera l'année $n+1$ de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

On désigne par n un entier naturel non nul. Pour une plante donnée, on note p_n, la probabilité de l'événement R_n "la plante donne une fleur rose la nième année".

(1) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique qui vérifie :
$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$
(2) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p_1 .
(3) Que vaut p_1 ? En déduire p_n , ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$
(4) (a) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?
  (b) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?

4 Une suite récurrente (avec IAF)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. On définit la suite (u_n) par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4.1 Calcul de u_n par un programme informatique

Écrire un programme en `SciLab` qui demande un entier n à l'utilisateur puis qui affiche les valeurs de $u_0, u_1, \ldots, u_n$.

4.2 Étude de la fonction f

(1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
(2) Étudier f, préciser les limites aux bornes, puis dresser son tableau de variations.
(3) Montrer en particulier que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ en $+\infty$, dont on donnera l'équation.
  (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de $f(x)$.
  (b) Montrer que
$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}.$$
  (c) En déduire que
$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
(4) Montrer que $\sqrt{\frac{3}{4}} \geq \frac{1}{2}$. En déduire, en utilisant la Question 4(b), que :
$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

4.3 Convergence de la suite (u_n)

(1) Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$
(2) Démontrer que que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |u_n - 1|.$$
(3) Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - 1|$$
(4) En déduire soigneusement que la suite (u_n) converge vers une limite à préciser.

5 Intégration

Pour tout entier n on note:
$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 x e^{-x^2}(1-x)^n dx.$$

(1) (a) Former le tableau de variation sur [0,1] de $x \to xe^{-x^2}$.
  (b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}.$$
  (c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(2) (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}.$$
  (b) En déduire la limite de I_n et celle de $n.I_n$ quand n tend vers $+\infty$.