ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Cahier de Vacances. Niveau III

Ce troisième cahier de vacances propose des exercices pour lesquels il est impératif d'être à l'aise avec toutes les notions vues cette année.

1 Algèbre Linéaire - D'après EDHEC 2012

On dit d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ qu'il est **diagonalisable** si il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (non nécessairement distincts) et une base $\mathfrak{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad f(u_i) = \lambda_i u_i.$$

Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}$ est diagonale.

(1) Montrer que si un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable, alors l'endomorphisme $f^2 = f \circ f$ est encore diagonalisable. (On pourra alors expliciter les coefficients diagonaux correspondants).

Le but de l'exercice est de montrer que la réciproque est fausse. Soit donc g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est notée

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(2) Déterminer A^2 puis, montrer que $A^4 = I$.
(3) (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $g(v) = \lambda v$. En utilisant la question précédente, montrer que $\lambda = 1$ ou que $\lambda = -1$.
  (b) En déduire que si g est diagonalisable, on pourra trouver une base $\{u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q\}$ de $\mathbb{R}^n$ (avec $p + q = n$) telle que $g(u_i) = u_i$ et $g(v_j) = -v_j$.
  (c) Montrer aussi que, pour tous les u_i sont des éléments de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$ et les v_j des éléments de $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id})$.

(4) Donner une base $\{u\}$ de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$.
(5) Déterminer $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id})$.
(6) Montrer qu'alors, g n'est pas diagonalisable.

(7) Résoudre l'équation $AX = -X$ (où X est un vecteur de $\mathbb{R}^3$). En déduire une base $\{v; w\}$ de $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{Id})$.
(8) Montrer que la famille $\{u; v; w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
(9) Écrire la matrice de g^2 dans la base $\{u; v; w\}$. Conclure.

2 Calcul Différentiel, Séries numériques (et probabilités discrètes) - D'après HEC 2004

Cet exercice traite de la difficulté d'intervertir les limites. En effet, une somme infinie étant une limite, on ne peut pas directement dériver sous le signe Σ.

On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs sur $\mathbb{N}^*$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = P(X = n).$$

(1) Justifier que la suite (a_n) est une suite de nombre positifs tels que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1.$$

(2) Soit $x \in [0; 1]$. Montrer que la série de terme général $a_n x^n$ est absolument convergente puis qu'elle converge.

(3) On désigne par f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que

$$f(1) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (1 - x^n).$$

(4) En déduire que, pour tout $x \in [0; 1[$,

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x - k \right).$$

☞ Dans toute la suite, on suppose que f est dérivable en 1.

(5) Déduire de la question précédente que la fonction $x \mapsto \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ est croissante sur $[0; 1[$ puis que, pour tout $x \in [0; 1[$, on a

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq f'(1).$$

(6) Soit $N \geq 1$ un entier. Justifier que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$ est continue sur $[0; 1]$ et que

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) = \sum_{n=1}^{N} n a_n.$$

(7) Montrer que, pour tout entier $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}.$$

(8) Déduire des deux questions précédentes que, pour tout entier $N \geq 1$, on a

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} n a_n \leq f'(1).$$

(9) En déduire que la série de terme général $n a_n$ est convergente.

(10) Utiliser la question précédente et la Question 4 pour montrer que, pour tout $x \in [0;1[$,

$$0 \leq \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1).$$

(11) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance donnée par

$$E(X) = f'(1).$$

3 Intégration - D'après EDHEC 2008

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

(1) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [0;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

(2) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout entier $k \in [\![0; n-1]\!]$, et pour tout réel $t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$,

$$\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right).$$

(3) En intégrant l'inégalité précédente, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout entier $k \in [\![0; n-1]\!]$,

$$\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}.$$

(4) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n}$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

(5) **Application.** Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right).$$

4 Variables à densité - D'après HEC 2010

On admet que, si X et Y, sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

(1) (a) Rappeler la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$. Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

(b) Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Soit λ un réel strictement positif. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ.

On pose alors

$$Y = X_1 - X_2, \quad T = \max(X_1, X_2), \quad \text{et} \quad Z = \min(X_1, X_2).$$

(2) Justifier les relations $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

(3) (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leq x])$, pour tout réel x.
(b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(Y)$, $V(Y)$.

(4) Déterminer pour tout réel z, $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

(5) (a) Montrer que pour tout réel t, on a

$$F_T(t) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda}\right)^2 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

Exprimer pour tout réel t, $f_T(t)$.
(b) Justifier l'existence de $E(T)$ et $V(T)$. Montrer que $E(T) = \frac{3}{2\lambda}$ et $V(T) = \frac{5}{4\lambda^2}$. (On pourra utiliser des changements de variables affines.)

(6) (a) Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.
(b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.
(c) Montrer que pour tout réel y, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t)\, dt$ est convergente et qu'elle vaut $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$.
(on distinguera les deux cas : $y \geq 0$ et $y < 0$)
(d) Établir que la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y.
(e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.