ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°2

Solution

Ce devoir reprend l'intégralité du sujet **ECRICOME 2012**.

Exercice 1.

(1) Pour $n=0$

$L+A^0(U_0-L)=L+U_0-L=U_0$.

Soit alors $n\in\mathbb{N}$ tel que $U_n=L+A^n(U_0-L)$. On a

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n+B \\ &= A\left[L+A^n(U_0-L)\right]+B \\ &= AL+A^{n+1}(U_0-L)+B \\ &= L+A^{n+1}(U_0-L) \quad \text{car } AL+B=L. \end{aligned}$$

La récurrence est ainsi démontrée et on a bien, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=A^n(U_0-L)+L$.

(2) Il y a plusieurs méthodes permettant de prouver que le vecteur $u=(x,y,z)$ appartient à l'image de b si et seulement si

$$-x+y+z=0.$$

On en propose une, assez courte, qui n'est pas forcément la méthode classique (qui consisterait à chercher sous quelle contrainte sur x,y et z un certain système aurait des solutions). Comme b a pour matrice (dans la base canonique) B, on a

$$\mathrm{Im}(b)=\mathrm{Vect}\left((3,1,2),(-1,0,-1),(-2,-1,-1)\right).$$

On observe alors que

$$(3,1,2)+(-1,0,-1)+(-2,-1,-1)=0.$$

Ainsi, on peut simplifier

$$\mathrm{Im}(b)=\mathrm{Vect}\left((-1,0,-1),(-2,-1,-1)\right).$$

D'autre part, on va trouver une base du sous-espace caractérisé par notre équation et ainsi, montrer qu'il s'agit de $\mathrm{Im}(b)$. Notant $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ -x+y+z=0\}$, on voit rapidement qu'on peut écrire $E=\mathrm{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1)\right)$, et E est donc un sous-espace de dimension 2, tout comme $\mathrm{Im}(b)$. De plus $(-1,0,-1)$ et $(-2,-1,-1)$ satisfont l'équation $-x+y+z=0$ donc $\mathrm{Im}(b)\subset E$ et comme les deux ont même dimension $\mathrm{Im}(b)=E$.

Pour $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}-a)$, on détermine sa matrice dans la base canonique

$$I-A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\ 4 & 0 & -4\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

On constate que la première colonne est l'opposé de la somme des deux dernières. Donc

$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}-a)=\mathrm{Vect}\left((-3,0,-3),(-3,-4,1)\right).$$

En particulier, les deux vecteurs ci-dessus n'étant pas colinéaires, $\dim(\mathrm{Id}-a)=2$. De plus $(-3,0,-3)$ et $(-3,-4,1)$ satisfont l'équation $-x+y+z=0$ donc appartiennent à $\mathrm{Im}\,(b)$ donc $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}-a)\subset\mathrm{Im}\,(b)$. Comme ces deux sous-espaces ont la même dimension, on a bien

$$\mathrm{Im}\,(b)=\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}-a).$$

(3) Soit $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

On montrer son inversibilité par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right),\qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right),\qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

ainsi P est inversible et

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(4) La matrice P étant inversible, l'endomorphisme qu'elle représente (dans la base canonique) est bijectif et notamment surjectif. Ainsi, ses trois colonnes forment une base de $\mathbb{R}^3$.

(5) Pour écrire les matrices demandées, il faut déterminer les images des vecteurs de cette nouvelle base par a et b:

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ -4 & 6 & 4\\ -2 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ -4 & 6 & 4\\ -2 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

et

$$A\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ -4 & 6 & 4\\ -2 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

La matrice de a dans cette base est donc

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}.$$

De même, on calcule leurs images par b

$$B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

donc $b\left((1,1,1)\right)=0$ qui a pour coordonnées $(0,0,0)$ dans la nouvelle base.

$$B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\1&0&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

donc $b\left(1,0,1\right)=(1,0,1)$ qui a pour coordonnées $(0,1,0)$ dans la nouvelle base, et

$$B\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\1&0&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Donc $b\left(0,-1,1\right)=(-1,-1,0)$ et on cherche ses coordonnées dans la nouvelle base.

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcr}x+y&=&-1\\x-z&=&-1\\x+y+z&=&0\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcr}y&=&-1-x\\z&=&x+1\\x&=&0\end{array}\right..$$

Donc $(-1,-1,0)=-\left(1,0,1\right)+(0,-1,1)$ et il suit que

$$B'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(6) On constate que $A=PDP^{-1}$. Ainsi, une récurrence immédiate permet d'obtenir la formule voulue

$$A^{n+1}=A\cdot A^n=PDP^{-1}\cdot PD^nP^{-1}=PD\cdot D^nP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}.$$

(7) D est diagonale donc

$$D^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(1/2)^n&0\\0&0&(1/3)^n\end{pmatrix}.$$

En posant

$$E'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad F'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\text{et}\quad G'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

on a donc

$$D^n=E'+\left(\frac{1}{2}\right)^nF'+\left(\frac{1}{3}\right)^nG'$$

et par la question précédente

$$\begin{aligned}A^n&=P\left(E'+\left(\frac{1}{2}\right)^nF'+\left(\frac{1}{3}\right)^nG'\right)P^{-1}\\&=E+\left(\frac{1}{2}\right)^nF+\left(\frac{1}{3}\right)^nG\end{aligned}$$

où on choisit de poser $E = PE'P^{-1}$ et de même pour F et G. On précise alors la valeur de E:

$$\begin{aligned}
E &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(8) Soit $L' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & p & q\\ 0 & 0 & r\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
DL' + B' &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & p & q\\ 0 & 0 & r\end{pmatrix} + B'\\
&= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}p & \frac{1}{2}q\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}r\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1+\frac{1}{2}p & \frac{1}{2}q - 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}r + 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc

$$L' = DL' + B' \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} p & = & \frac{1}{2}p + 1\\ q & = & \frac{1}{2}q - 1\\ r & = & \frac{1}{3}r + 1\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} p & = & 2\\ q & = & -2\\ r & = & \frac{3}{2}\end{array}\right.$$

et finalement

$$L' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 3/2\end{pmatrix}.$$

(9) Comme $A = PDP^{-1}$ et que $B = PB'P^{-1}$ (il n'était pas demandé de le vérifier mais on comprend assez vite que cela marche comme pour A), alors

$$\begin{aligned}
PL'P^{-1} &= PDPP^{-1}L'P^{-1} + PB'P^{-1}\\
&= AL + B.
\end{aligned}$$

(10) On peut faire les calculs directement ou bien raisonner avec des matrices plus simples.

$$EL = PE'P^{-1}\cdot PL\prime P^{-1} = P\left(E'L'\right)P^{-1} = P\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & p & q\\ 0 & 0 & r\end{pmatrix}\right)P^{-1} = P\cdot 0\cdot P^{-1} = 0.$$

(11) On a $U_n = L + A^n\left(U_0 - L\right)$ avec $A^n = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G$.

On a $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et de même $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ donc les coefficients de la matrice $L + A^n\left(U_0 - L\right)$ tendent vers ceux de $L + E\left(U_0 - L\right) = L + EU_0 - EL$ et comme $EL = 0$ alors chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.

Exercice 2.

Partie I - Étude d'une fonction f.

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x}, & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Le développement limité rappelé dans le sujet permet d'écrire que, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-(1-x+x^2/2+o(x^2))}{x} \\ &= \frac{x-x^2/2+o(x^2)}{x} \\ &= 1-\frac{x}{2}+o(x) \\ &\longrightarrow 1 = f(0),\ x \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et f est bien continue en 0. Sur $]0;+\infty[$, f est un quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas donc f y est continue. Au final, f est continue sur $[0;+\infty[$.

(2) Il faut montrer que le taux d'accroissement en 0 admet une limite lorsque x tens vers 0. On utilise encore le développement limité précédent. Pour x proche de 0

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{1-x/2+o(x)-1}{x} \\ &= -\frac{1}{2}+o(1) \\ &\longrightarrow -\frac{1}{2},\ x \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1/2$.

(3) Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, f est dérivable comme quotient de fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Les formule de dérivation donnent, pour $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{-x}x-(1-e^{-x})}{x^2} \\ &= \frac{(x+1)e^{-x}-1}{x^2} \\ &= \frac{\varphi(x)}{x^2}, \end{aligned}$$

où on a naturellement posé $\varphi(x) = (x+1)e^{-x}-1$.

(4) Le signe de $f'(x)$ est bien évidemment donné par celui de $\varphi(x)$ d'où l'intérêt d'étudier la fonction. C'est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ (en fait sur $[0;+\infty[$) et on a, pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = -xe^{-x} < 0$$

Ainsi φ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. La fonction φ étant finalement définie et continue sur $[0;+\infty[$, elle y est strictement décroissante aussi. Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que $\varphi(x) < 0$, pour tout $x < 0$. Ainsi, $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$, et en fait - vu que $f'(0) = -1/2$ - pour tout $x \geq 0$. Au final, f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Comme l'exponentielle tend vers 0 en $-\infty$, l'algèbre des limites nous donne que $f(x)$ tens vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et on peut dresser le tableau de variations:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	0

Partie II - Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u.$$

(1) La fonction $u \mapsto e^{-u/n}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$. Son minimum sur l'intervalle $[0;n]$ est atteint en n, ou encore, pour tout $u \in [0;n]$,

$$e^{-\frac{u}{n}} \geq e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Par positivité de l'intégrale (on intègre entre 0 et n dans l'ordre croissante), on obtient que

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^n \frac{e^{-u/n}}{1+u}\mathrm{d}u \\
&\geq \int_0^n \frac{1}{e}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\
&= \frac{1}{e}[\ln(1+u)]_0^n \\
&= \frac{\ln(1+n)}{e},
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité demandée. Comme $\ln(n+1) \longrightarrow +\infty$, $n \to +\infty$, on déduit, par comparaison, que $u_n \longrightarrow +\infty$, $n \to +\infty$.

(2) L'intégrale étudiée est *a priori* impropre en 0. Mais en fait, la fonction f est continue sur $[0;1]$ d'après la partie précédente. L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné étant bien définie, on conclue donc à l'existence de celle-ci.

(3) Il est clair (par positivité de l'exponentielle et de l'intégrale) que

$$\int_0^n \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \leq u_n.$$

Pour l'autre inégalité, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^n \frac{\mathrm{d}u}{1+u} - u_n &= \int_0^n \left(\frac{1}{1+u} - \frac{e^{-u/n}}{1+u}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^n \frac{1-e^{-u/n}}{1+u}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Il apparait alors naturel d'utiliser le changement de variables affine $t = u/n$ qui donne $u = nt$ et $\mathrm{d}u = n\mathrm{d}t$. Il suit que

$$\int_0^n \frac{1-e^{-u/n}}{1+u}\mathrm{d}u = n\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{1+nt}\mathrm{d}t.$$

On a ensuite envie de majorer

$$\frac{n}{1+nt} \leq \frac{n}{nt} = \frac{1}{t}$$

pour obtenir l'inégalité souhaitée. La preuve, un peu subtile, doit néanmoins être rigoureuse, car $1/t$ n'est pas *intégrable* entre 0 et 1. On fixe donc $\varepsilon > 0$. Il est clair que, d'une part

$$n\int_\varepsilon^1 \frac{1-e^{-t}}{1+nt}\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} n\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{1+nt}\mathrm{d}t$$

mais qu'aussi

$$n\int_\varepsilon^1 \frac{1-e^{-t}}{1+nt}\mathrm{d}t \leq \int_\varepsilon^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^1 f(t)\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

car la dernière intégrale est convergente. En combinant tout cela, on obtient que

$$n\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{1+nt}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

ce qui donne bien l'encadrement souhaité.

(4) On sait calculer

$$v_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln(n+1)$$

et que $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est une constante que, même si on n'en connait pas la valeur, on peut noter $c > 0$. La question précédente donne alors

$$0 \leq v_n - u_n \leq c \Longleftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \leq \frac{c}{\ln(n+1)}.$$

Par le théorème des gendarmes, on voit donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n+1)} = 1 \Longrightarrow u_n \sim_{+\infty} \ln(n+1).$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une entreprise dispose d'un lot du n feuilles originales qu'elle a numérotées $1, 2, ..., n$. Elle photocopie ces n feuilles originales et souhaite que chaque original soit agrafé avec sa copie. L'entreprise programme le photocopieur afin que chaque original soit agrafé avec sa copie. Cependant, suite à un défaut informatique, la photocopieuse a mélangé les originaux et les copies. L'entreprise décide donc de placer les n originaux et les n copies dans une boite. Une personne est alors chargée du travail suivant: elle pioche simultanément et au hasard 2 feuilles dans la boite. S'il s'agit d'un original et de sa copie, elle les agrafe et les sort de la boite. Sinon, elle repose les deux feuilles dans la, boite et elle recommence.

On modélise l'expérience par un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$. Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de pioches qui sont nécessaires pour vider la boite lorsque celle-ci contient n originaux et n copies (soit $2n$ feuilles).

On considère l'événement A_n : « à l'issue de la première pioche, les deux feuilles piochées ne sont pas agrafées » et a_n sa probabilité c'est-à-dire que $a_n = \mathrm{P}(A_n)$.

(1) il y a $2n$ feuilles dans la boite. Les premières pioches sont (ni ordre ni répétition) les combinaisons de deux feuilles parmi $2n$. Il y en a

$$\binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2}.$$

Les pioches formant un couple sont déterminées par la feuille originale (parmi n) il y en a n. Donc

$$\mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right) = \frac{n}{\binom{2n}{2}} = \frac{1}{2n-1}$$

et

$$a_n = P(A_n) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right) = \frac{2n-2}{2n-1}.$$

(2) **Étude de T_2.** On suppose dans cette question que $n=2$, c'est-à-dire que la boite contient deux originaux et deux copies.

(a) Pour vider la boite, il faut et suffit d'avoir d'abord un premier couple, les feuilles restantes seront alors agrafées à la pioche suivante.
Donc $(T_2 = k)$ signifie que l'on n'a pas eu de couple jusqu'à $k-1$, et que l'on en a eu un à la $k-1^{ème}$ pioche.
En notant S_i (succès) le fait d'avoir un couple à la $i^{ème}$ pioche et E_i sinon, on a donc :

$$\begin{aligned}(T_2 = k) &= E_1 \cap \cdots S_{k-1} \text{ et} \\ \mathrm{P}(T_2 = k) &= \mathrm{P}(E_1)\,\mathrm{P}_{E_1}(E_2)\cdots\mathrm{P}_{E_1\cdots E_{k-2}}(S_{k-1})\end{aligned}$$

Tant que l'on n'a pas eu de couple, on est avec une boite contenant les 4 feuillets et la probabilité de ne pas piocher un couple est donc a_2.
On peut conclure que, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\mathrm{P}(T_2 = k) = (1-a_2)(a_2)^{k-2}.$$

(b) $S_2 = T_2 - 1$.
Donc $S_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(S_2 = k) = (T_2 = k+1)$ donc $\mathrm{P}(S_2 = k) = (1-a_2)(a_2)^{k-1}$ ou encore

$$S_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-a_2).$$

Par application des résultats du cours concernant la loi géométrique,

$$E(S_2) = \frac{1}{1-a_2}, \quad \text{et} \quad V(S_2) = \frac{a_2}{(1-a_2)^2}.$$

et comme $T_2 = S_2 + 1$ alors $V(T_2) = V(S_2)$ et $E(T_2) = E(S_2) + 1$, il suit que

$$E(T_2) = \frac{2-a_2}{1-a_2} \quad \text{et} \quad V(T_2) = \frac{a_2}{(1-a_2)^2}.$$

(c) Pour la fonction `SciLab` demandée, il suffit de programmer une loi géométrique de paramètre $a_2 = 2/3$ et de rajouter 1 car $T_2 - 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(a_2)$.

```
function y=CB()
    y=1;
    while rand()<2/3
        y=y+1;
    end
    y=y+1; //T_2-1 géométrique donc on rajoute 1
endfunction
```

(3) **Étude de T_3.** On suppose dans cette question que $n=3$, c'est-à-dire que la boite, contient trois originaux et trois copies.

(a) Comme il y a 3 paires à reformer , $(T_3 = 2)$ est impossible et $\mathrm{P}(T_3 = 2) = 0$
$(T_3 = 3)$ signifie que l'on a fait des paires à chaque pioche :
Donc $(T_3 = 3) = S_1 \cap S_2$ (on a alors S_3) et

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_3 = 3) &= \mathrm{P}(S_1)\,\mathrm{P}_{S_1}(S_2) \\ &= (1-a_3)(1-a_2)\end{aligned}$$

car quand on a fait le premier couple, il reste 4 feuilles.

(b) $\left(A_3, \overline{A_3}\right)$ est un système complet d'événements, donc pour tout $k \geq 2$ (impossible sinon) que :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_3 = k+1) &= \mathrm{P}_{A_3}(T_3 = k+1)\,\mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1)\,\mathrm{P}\left(\overline{A_3}\right) \\ &= a_3\,\mathrm{P}(T_3 = k) + (1-a_3)\,\mathrm{P}(T_2 = k)\end{aligned}$$

avec $\mathrm{P}_{A_3}(T_3 = k+1) = \mathrm{P}(T_3 = k)$ car, quand on n'a pas fait de couple au premier on est encore avec les 6 feuillets dans la boite et il ne reste que k pioches à faire pur finir en $k+1$ picoches.
et $\mathrm{P}_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1) = \mathrm{P}(T_2 = k)$ car un couple ayant été agrafé, il ne reste que 2 coules dans la boites et k pioches à faire pour la vider.

(c) Courageusement, par récurrence :
Pour $k = 2$:

$$\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^0 - (a_2)^0\right] = \mathrm{P}(T_3 = 2)$$

Soit $k \geq 2$ tel que

$$\mathrm{P}(T_3 = k) = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right].$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T_3 = k+1) &= a_3\,\mathrm{P}(T_3 = k) + (1-a_3)\,\mathrm{P}(T_2 = k) \\
&= a_3\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] + (1-a_3)(1-a_2)(a_2)^{k-2} \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[a_3(a_3)^{k-2} - a_3(a_2)^{k-2} + (a_2)^{k-2}(a_3 - a_2)\right] \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-1} - (a_2)^{k-1}\right]
\end{aligned}$$

On a bien

$$\forall k \geq 2, \quad \mathrm{P}(T_3 = k) = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right].$$

(d) On doit trouver 1!

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{M} \mathrm{P}(T_3 = k) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\sum_{k=2}^{M}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\sum_{h=0}^{M}\left[(a_3)^{h} - (a_2)^{h}\right] \\
&\to \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[\frac{1}{1-a_3} - \frac{1}{1-a_2}\right] \text{ car } |a_3| < 1 \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[\frac{a_2 - a_3}{(1-a_3)\,1-a_2}\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ouf!

(e) Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{M} (k-1) \,\mathrm{P}\,(T_3 = k) \\
&= \sum_{k=2}^{M} (k-1) \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2} \left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2} \right] \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2} \sum_{h=1}^{M-1} h\,(a_3)^{h-1} - h\,(a_2)^{h-1} \\
&\to \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2} \left[\frac{1}{(1-a_3)^2} - \frac{1}{(1-a_2)^2} \right] \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2} \left[\frac{(1-a_2)^2 - (1-a_3)^2}{(1-a_3)^2 (1-a_2)^2} \right] \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2} \left[\frac{(1-a_2-1+a_3)(1-a_2+1-a_3)}{(1-a_3)^2 (1-a_2)^2} \right] \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2} \left[\frac{(a_3-a_2)(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)^2 (1-a_2)^2} \right] \\
&= \frac{(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)(1-a_2)} = E\,(T_3 - 1)
\end{aligned}$$

La série est absolument convergente, donc $T_3 - 1$ admet une espérance et calculer

$$E\,(T_3 - 1) = \frac{(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)(1-a_2)}.$$

Donc T_3 a une espérance et

$$E\,(T_3) = \frac{(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)(1-a_2)} + 1.$$

(f) De même (presque ...)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{M} k\,(k-1) \,\mathrm{P}\,(T_3 = k) \\
&= \sum_{k=2}^{M} k\,(k-1) \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2} \left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2} \right] \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2} \sum_{k=2}^{M} k\,(k-1) \left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2} \right] \\
&\to \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2} \left[\frac{2}{(1-a_3)^3} - \frac{2}{(1-a_2)^3} \right] \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2} \left[\frac{(1-a_2)^3 - (1-a_3)^3}{(1-a_3)^3 (1-a_2)^3} \right]
\end{aligned}$$

et on doit retravailler d'abord

$$x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

pour simplifier

$$\begin{aligned}E\left[T_3\left(T_3-1\right)\right] &= \frac{\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)}{a_3-a_2}\left[\frac{\left(1-a_2-1+a_3\right)\left[\left(1-a_2\right)^2+\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)+\left(1-a_3\right)^2\right]}{\left(1-a_3\right)^3\left(1-a_2\right)^3}\right]\\ &= \frac{a_2^2-2a_2+1+1-a_2-a_3+a_2a_3+1-2a_3+a_3^2}{\left(1-a_3\right)^2\left(1-a_2\right)^2}\\ &= \frac{a_2^2+a_2a_3-3a_2+a_3^2-3a_3+3}{\left(1-a_3\right)^2\left(1-a_2\right)^2}\end{aligned}$$

car la série est absolument convergente
$T_3\left(T_3-1\right)=T_3^2-T_3$ donc $T_3^2=T_3\left(T_3-1\right)+T_3$ a une espérance et

$$\begin{aligned}E\left(T_3^2\right) &= E\left[T_3\left(T_3-1\right)\right]+E\left(T_3\right)\\ &= \frac{a_2^2+a_2a_3-3a_2+a_3^2-3a_3+3}{\left(1-a_3\right)^2\left(1-a_2\right)^2}+\frac{\left(2-a_2-a_3\right)}{\left(1-a_3\right)\left(1-a_2\right)}+1\end{aligned}$$

donc T_3 a une variance et

$$V\left(T_3\right)=E\left(T_3^2\right)-E\left(T_3\right)^2$$

et là l'énoncé ne demande pas son expression ... donc on s'arrête, et on respire.