ECE - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Concours Blanc n°1

Durée : 4 heures

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. Tous documents et calculatrice interdits.

Exercice 1. (Warm up)

(1) Résoudre, dans $\mathbb{N}$,
$$\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \frac{5n^2-4n}{3}.$$

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k}.$$

(a) Calculer S_1, S_2, S_3.

(b) À l'aide d'une formule que l'on citera, calculer
$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}.$$

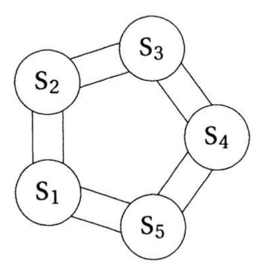
(c) Montrer alors que
$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

(3) Soient A, B deux évènements d'un espace probabilisé. Montrer que
$$\max(0, P(A)+P(B)-1) \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B)).$$

(4) Après avoir factorisé le polynôme $Q(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$, trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $Q(X)$.

Exercice 2.

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-contre.



Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.

Ils décident alors de partir à la recherche I'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n:

- A_n : "les deux personnes sont sur le même site après le n-ième déplacement";
- B_n : "les deux personnes sont sur des sites adjacents après le n-ième déplacement";
- C_n : "les deux personnes sont à deux routes de distance après le n-ième déplacement".

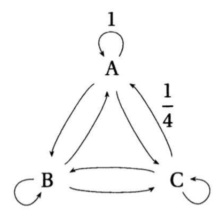
On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n.

(1) Justifier que A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements.
(2) Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

(3) (a) Justifier soigneusement que

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P_{A_n}(A_{n+1}) = 1.$$

(b) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues. On représentera les résultats en reproduisant et complétant le schéma ci-contre.



(4) Établir les relations suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} & = & \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{array} \right. .$$

(5) (a) Exprimer b_{n+2} à l'aide de b_{n+1}, b_n et c_n puis exprimer c_n en fonction de b_{n+1} et b_n pour obtenir enfin une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.

(b) En déduire une expression de b_n en fonction de n. On fera intervenir les nombres

$$\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n - \alpha^n\right).$$

(6) À partir de la somme $a_n + b_n + c_n$, déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la suite (a_n).

(7) On note Z l'évènement "les deux personnes se rencontrent à un moment".

(a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A_n \subset Z.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n \leq P(Z) \leq 1$$

(c) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?

Exercice 3.

(1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(a) Étudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
(b) Calculer une équation de la tangente T à C à l'abscisse 0.
(c) Étudier les positions relatives de C et T. Préciser les points d'intersection.
(d) Construire C et T.

(2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:
$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}.$$

(a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que
$$f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}.$$

(b) En déduire par récurrence que pour tout entier n, on a l'encadrement
$$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(d) En déduire par récurrence et à l'aide du 2.b) que pour tout entier $n \geq 1$,
$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(3) (a) Montrer que pour tout réel $x \geq 2$, $\dfrac{1}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-1)$.

(b) En déduire que, pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$, puis que, pour tout entier $n \geq 2$,
$$\frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n).$$

(c) À l'aide des résultats précédents, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n \cdot u_n$.

(4) Écrire une suite d'instructions en `SciLab` afin de représenter graphiquement (sur une même figure) les 25 premiers termes de la suite (u_n) et ceux de la suite (nu_n).