ECE - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Concours Blanc n°1

Solution

Exercice 1. (Warm up)

(1) D'après la formule du triangle de Pascal,

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}=\frac{5n^2-4n}{3} &\iff \binom{n+2}{3}=\frac{5n^2-4n}{3}\\ &\iff \frac{(n+2)(n+1)n}{6}=\frac{n(5n-4)}{3}\\ &\iff (n+2)(n+1)=2(5n-4) \text{ ou } n=0\\ &\iff n^2-7n+10=0 \text{ ou } n=0\\ &\iff n=5 \text{ ou } n=2 \text{ ou } n=0\end{aligned}$$

Au final,

$$\mathcal{S}=\{0;2;5\}.$$

(2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{n+k}.$$

(a) Par définition,

$$S_1=\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=2+1=3,$$

$$S_2=\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=6+4+1=11$$

et

$$S_3=\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=20+15+6+1=42.$$

(b) D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}1^k1^{2n-k}\\ &= (1+1)^{2n}\\ &= 2^{2n}.\end{aligned}$$

(c) On constate que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n-k} \qquad \text{(par symétrie: } 2n-(n+k)=n-k) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j} \qquad \text{(par réindexation } j=n-k) \end{aligned}$$

mais aussi que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} = \sum_{j=n}^{n} \binom{2n}{k} \qquad \text{(par réindexation } j=n+k) \\ &= \binom{2n}{n} + \sum_{j=n+1}^{n} \binom{2n}{j}. \end{aligned}$$

Au final,

$$\begin{aligned} 2S_n &= S_n + S_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j} + \binom{2n}{n} + \sum_{j=n+1}^{n} \binom{2n}{j} \\ &= \binom{2n}{n} + \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \\ &= \binom{2n}{n} + 2^{2n} \end{aligned}$$

et en divisant par 2:

$$S_n = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} + 2^{2n-1}.$$

(3) Par définition, $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc $P(A\cap B) \leq P(A)$ et $P(A \cap B) \leq P(B)$. Une une quantité est plus petite que deux autres quantités, elle est en particulier plus petite que le minimum de ces deux quantités. On a donc l'inégalité de droite de l'encadrement demandé.

Pour l'inégalité de gauche, commençons par écrire que, par la formule du crible,

$$P(A \cap B) = P(1) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Or cette quantité pourrait être négative, mais une probabilité étant toujours positive ou nulle, on a aussi $P(A \cap B) \geq 0$. On a donc bien également l'inégalité de gauche.

(4) Il est facile de voir que le polynôme $Q(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$ a pour racine évidente $\alpha = -1$ ainsi, il se factorise par $(X - (-1)) = (X + 1)$. Il existe donc un polynôme $S(X)$ de degré 2 tel que $Q(X) = (X + 1)S(X)$. Pour trouver $S(X)$, on peut procéder par identification, ou bien poser la division. Dans les deux cas, on trouve $S(X) = X^2 - 5X + 6$ qu'on factorise également via calcul du discriminant

$$Q(X) = (X + 1)(X^2 - 5X + 6) = (X + 1)(X - 2)(X - 3).$$

En particulier, Q a pour racines -1, 2 et 3. Pour trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $Q(X)$, on écrit la division euclidienne *théorique*: il existe un polynôme $R(X)$ de degré strictement inférieur ou égal à celui de $Q(X)$ et un polynôme $H(X)$ tels que

$$X^n = Q(X)H(X) + R(X).$$

Comme $\deg R \leq 2$, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $R(X) = aX^2 + bX + c$. Pour trouver a, b, c, il faut injecter dans l'équation de division euclidienne des valeurs qui nous donnent des équations sur a, b, c qu'on pourra résoudre. Pour ce faire, on utilise les racines de Q afin d'éliminer les termes qui proviendraient de H qu'on ne connait pas. On obtient alors:

$$(-1)^n = R(-1) = a - b + c, \quad 2^n = R(2) = 4a + 2b + c \quad \text{et} \quad 3^n = R(3) = 9a + 3b + c.$$

Il faut donc résoudre un système de trois équations à trois inconnues (qu'on résout par *Pivot de Gauss*)

$$\left\{\begin{array}{lcl} a - b + c & = & (-1)^n \\ 4a + 2b + c & = & 2^n \\ 9a + 3b + c & = & 3^n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a - b + c & = & (-1)^n \\ 6b - 3c & = & 2^n - 4(-1)^n \\ 12b - 8c & = & 3^n - 9(-1)^n \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} a - b + c & = & (-1)^n \\ 6b - 3c & = & 2^n - 4(-1)^n \\ -2c & = & 3^n - 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \end{array}\right.$$

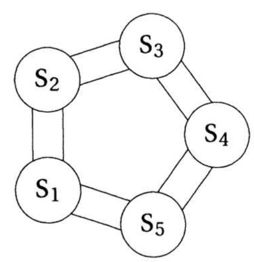
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & ((-1)^n - 2^{n+2} + 3^{n+1})/12 \\ b & = & (2^{n+3} - 5(-1)^n - 3^{n+1})/12 \\ c & = & \left(-3^n + 2^{n+1} + (-1)^n\right)/2 \end{array}\right.$$

On a donc

$$R(X) = \frac{1}{12}\left(((-1)^n - 2^{n+2} + 3^{n+1})X^2 + (2^{n+3} - 5(-1)^n - 3^{n+1})X + \left(-2 \times 3^{n+1} + 3 \times 2^{n+2} + 6(-1)^n\right)\right).$$

Exercice 2.

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-contre.



Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.

Ils décident alors de partir à la recherche I'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n:

- A_n : "les deux personnes sont sur le même site après le n-ième déplacement";
- B_n : "les deux personnes sont sur des sites adjacents après le n-ième déplacement";
- C_n : "les deux personnes sont à deux routes de distance après le n-ième déplacement".

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n.

(1) Deux sommets d'un pentagone peuvent êtres séparés par une ou deux arrêtes au plus. Ainsi, les deux personnes sont bien toujours dans l'une des trois alternatives décrites par les trois évènements, qui sont bien deux à deux incompatibles. On a bien un s.c.e.

(2) D'après le texte, à l'instant 0, il y a une route d'écart entre les deux personnes, donc $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

(3) (a) Si les deux amis se retrouvent, ils ne se quittent plus, donc la présence des deux personnes sur le même site au moment n entraîne forcément la même chose au moment $n+1$. Donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$.
D'autre part, si il y a deux routes d'écart entre les deux personnes, la seule façon que celles-ci se retrouvent est qu'elles partent toutes deux l'une vers l'autre, ce que chacune fait avec probabilité $1/2$ donc on a bien

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(b) Avec le même raisonnement, on trouve les autres probabilités conditionnelles:
- $\mathrm{P}_{A_n}(B_{n+1}) = 0$: $\mathrm{P}_{A_n}(C_{n+1}) = 0$ (si ils sont ensembles au moment n, ils le restent);
- $\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}) = 0$ (quand ils sont à une route de distance, ils se croisent ou ils s'éloignent);
- $\mathrm{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{3}{4}$ (ils se déplacent tous deux dans le même sens ; horaire ou antihoraire avec une probabiltié $\frac{1}{4}$, ou ils se croisent);
- $\mathrm{P}_{B_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ (ils se fuient);
- $\mathrm{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ (ils se déplacent dans le sens opposé qui les rapproche);
- $\mathrm{P}_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$ (ils se déplacent tous deux dans le même sens).

(4) On a déjà que $\{A_n, B_n, C_n\}$ formait un s.c.e. Par la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) \\ &= a_n + \frac{1}{4}c_n. \end{aligned}$$

On obtient de façon totalement analogue les autres relations de récurrence du système ci-dessous:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} & = & \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{array} \right. .$$

(5) (a) On a

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}c_n \end{aligned}$$

et comme $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ on a $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$ et donc

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}\left(4b_{n+1} - 3b_n\right) \\ &= \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n \end{aligned}$$

(b) La suite (b_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On détermine son terme général en suivant le plan d'étude du cours.
Son équation caractéristique est $r^2 - \frac{5}{4}r + \frac{5}{16} = 0$ de discriminant $\Delta = \frac{25}{16} - \frac{20}{16} = \frac{5}{16}$ et donc de racines

$$\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

Donc, on va devoir trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout entier n,

$$b_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n.$$

En utilisant les valeurs des termes initiaux ($b_0 = 1$ et $b_1 = 3/4$) on doit le système suivant

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ \alpha\lambda + \beta\mu &= 3/4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda &= (5-\sqrt{5})/10 \\ \mu &= (5+\sqrt{5})/10 \end{cases}$$

Au final,

$$b_n = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n = \frac{4}{5}\left(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}\right)$$

(c) Et comme $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$ on a alors :

$$\begin{aligned} c_n &= 4\frac{4}{5}\left(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}\right) - 3\frac{4}{5}\left(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}\right) \\ &= \frac{4}{5}\left(\left(4\alpha - 3\right)\alpha \cdot \alpha^n + \left(4\beta - 3\right)\beta \cdot \beta^{n+1}\right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \left(4\alpha - 3\right)\alpha &= \left(4\frac{5-\sqrt{5}}{8} - 3\right)\frac{5-\sqrt{5}}{8} \\ &= -\frac{1}{4}\sqrt{5} \\ \left(4\beta - 3\right)\beta &= \left(4\frac{5+\sqrt{5}}{8} - 3\right)\frac{5+\sqrt{5}}{8} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{5} \end{aligned}$$

Au final, on a bien

$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n - \alpha^n\right).$$

(6) Étant clair que $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$, on en déduit que b_n et c_n tendent toutes deux vers 0. Comme on a un système complet d'évènements,

$$a_n = 1 - b_n - c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

(7) On note Z l'évènement "les deux personnes se rencontrent à un moment".

(a) Il est clair que si on est sur le même site au moment n, alors on a bien fini par se rencontrer, donc évidemment $A_n \subset Z$.

(b) Il découle immédiatement que

$$a_n \leq P(Z) \leq 1$$

Par le théorème des gendarmes, cela impose que $P(Z) = 1$.

(c) La probabilité cherchée est celle du contraire de Z qui a pour probabilité 1, donc il y a une probabilité nulle de ne jamais se recontrer.

Exercice 3.

(1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule jamais. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 + x + 1 - x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+x+1)^2}. \end{aligned}$$

Le signe de cette dérivée s'obtient très facilement et permet de voir que f est décroissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$ et croissante sur $[-1;1]$. De plus, en factorisant par le terme prépondérant, on voit que

$$f(x) = \frac{1}{x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci nous permet de dresser un joli tableau de variations, que voici:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

(b) La tangente T à C en 0 a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ y &= x \end{aligned}$$

(c) Étudier la position de C par rapport à T revient à chercher le signe de $f(x) - x$. Or,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x}{x^2+x+1} - \frac{x(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \\ &= \frac{-x^3 - x^2}{x^2+x+1} \\ &= -\frac{x^2(x+1)}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

ce qui ne s'annule qu'en $x = 0$ ou $x = -1$. Ainsi, les points d'intersection de C et T sont

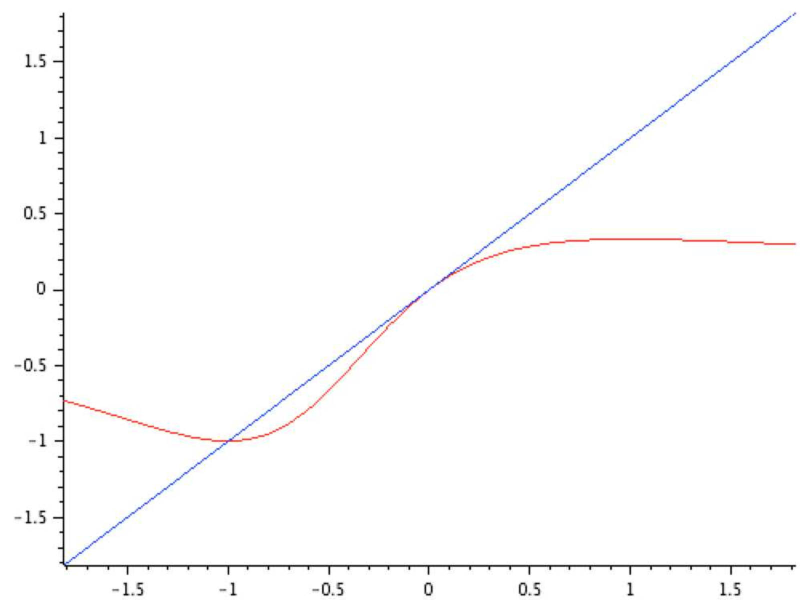
$$(0, f(0)) = (0, 0) \qquad \text{et} \qquad (-1, f(-1)) = (-1, -1).$$

De plus, on trouve facilement le signe de $f(x) - x$ qu'on résume dans le tableau ci-dessous:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

En particulier, sur l'intervalle $]-\infty; -1]$, C est au dessus de T mais est au dessous de T sur $[-1; +\infty[$.

(d) On représente les deux éléments, grâce à `SciLab`:



(2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}.$$

(a) Soit p un entier naturel non nul. On a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{p}\right) &= \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + 1} \\ &= \frac{1}{p} \times \frac{p^2}{1 + p + p^2} \\ &= \frac{p}{p^2 + p + 1} \\ &\leq \frac{p}{p^2 + p} \\ &= \frac{1}{p + 1}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) Pour $n = 0$, $0 < u_0 = 1 \leq 1/(0+1)$ donc la propriété est vraie. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 < u_n \leq 1/(n+1)$, comme f est croissante sur $[-1;1]$ (et que par HR u_n en est un élément, tout comme $1/n+1$), on a

$$0 = f(0) < u_{n+1} = f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1+1} = \frac{1}{n+2}$$

par la question précédente. L'encadrement voulu est ainsi démontré.

(c) Par le théorème des gendarmes, on conclut immédiatement que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

(d) Pour $n = 1$, $1/u_1 = 1/(1/3) = 3 \leq 3$ et c'est bon. Supposons que la propriété soit vraie pour un certain $n \geq 1$. Par définition de f et de (u_n) on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u_{n+1}} &= \frac{1}{f(u_n)} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n} \\
&= u_n + 1 + \frac{1}{u_n} \\
&\leq u_n + 1 + n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{(par HR)} \\
&\leq \frac{1}{n+1} + n + 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{(par 2.b))} \\
&\leq n + 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k},
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité voulue au rang $n+1$. La récurrence est ainsi démontrée.

(3) (a) Cette inégalité est très classique et on l'a déjà rencontrée (tout comme la question d'après). On pose $\varphi(x) = 1/x - \ln(x) + \ln(x-1)$. La fonction φ est dérivable sur $[2; +\infty[$ et sa dérivée vaut $\varphi'(x) = 1/x^2(x-1) > 0$ pour $x \geq 2$. Ainsi, φ est strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Or $\varphi(x) \longrightarrow 0$, $x \to +\infty$. Ainsi, $\varphi(x) \leq 0$, pour tout $x \geq 2$, ce qui revient à l'inégalité demandée.

(b) La première inégalité s'obtient très facilement à partir de la question en sommant de chaque côté de l'inégalité, en reconnaissant à droite une somme télescopique:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1)) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n).$$

En reprenant l'inégalité de la Question 2.d), et en y injectant ce qui se trouve ci-dessus (en faisant bien attention de sortir le terme de la somme correspondant à l'indice $k = 1$ car l'inégalité n'est pas vraie pour cet indice-là), on obtient

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n + 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq n + 2 + \ln(n).$$

(c) En combinant la question précédente et la Question 2.b), on trouve l'encadrement

$$\frac{1}{n+2+\ln(n)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

ce qui, en multipliant par n, donne

$$\frac{n}{n+2+\ln(n)} \leq n \cdot u_n \leq \frac{n}{n+1}.$$

Étant clair que les deux termes des extrémités tendent vers 1 (par factorisation du terme prépondérant et croissance comparée), le théorème des gendarmes affirme donc que

$$\lim_{n \to +\infty} n \cdot u_n = 1.$$

(4) On propose la suite d'instructions ci-dessous dont l'exécution donne la figure qui suit.

```
function y=f(x)
    y=x/(x^2+x+1);
endfunction

function y=u(n) //suite (u_n) définie sous forme de fonction
    y=1;
    for k=1:n
        y=f(y)
    end
endfunction

function y=nu(n) //suite (n*u_n) définie aussi sous forme de fonction
    y=n*u(n);
endfunction

A=0:24; B=feval(A,u); C=feval(A,nu);
plot2d(A,B,-1)
plot2d(A,C,-2)
```