

---

## Devoir Maison n°10

À rendre le 31 Janvier

---

**Exercice 1.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on s'intéresse à la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + e^x} + nx.$$

- (1) Étudier la fonction  $h_n : x \mapsto e^x - n(1 + e^x)^2$ . En déduire les variations de  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (2) Justifier que  $f_n$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle à préciser. Dresser le tableau de variations de  $f_n^{-1}$  sur son ensemble de définition.
- (3) Étudier les branches infinies de  $f_n$ .
- (4) Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , que l'on notera  $u_n$ .
- (5) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$-\frac{1}{n} < u_n < 0.$$

- (6) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
- (7) En revenant à la définition de  $u_n$ , montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n \times u_n = 1.$$

**Exercice 2.** (Continuité et dérivabilité)

- (1) La fonction suivante est-elle continue en 0? Est-elle dérivable en 0? Que peut-on en déduire graphiquement?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x \ln(x) - 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- (2) (Utilisation de DL)

- (a) Montrer, à l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en 0, que la fonction  $g$  est continue en 0.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x}{e^x - e^{-x}}, & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- (b) On veut montrer que  $g$  est également dérivable en 0 et déterminer  $g'(0)$ . Utiliser les DLs en 0 à l'ordre 2 ci-dessous pour répondre à la question

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$