ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°11

À rendre le Mardi 7 Mars

Exercice 1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.

Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on considère l'équation notée

$$(E_n) \qquad\qquad g(x) = n.$$

(1) (a) Dresser le tableau des variations de g en précisant les limites aux bornes.

(b) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions , l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.

(2) Dans cette question on note $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite ainsi définie:

$$\begin{cases} u_0 & = & -1 \\ u_{k+1} & = & e^{u_k} - 2 \end{cases}.$$

(a) On rappelle que α_2 est le réel strictement négatif obtenu à la question 1.(b) lorsque $n = 2$. Calculer $g(-1)$ et $g(-2)$ puis montrer que $-2 \leq \alpha_2 \leq -1$.

(b) Justifier que $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.
En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel k : $\alpha_2 \leq u_k \leq -1$.

(c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate, montrer que pour tous réels a et b tels que $a \leq b \leq -1$,

$$0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b-a).$$

(d) Montrer que pour tout entier naturel k , $u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - e^{\alpha_2}$.
En déduire, par récurrence, que pour tout entier naturel k,

$$0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k.$$

(e) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite α_2.

(f) On considère le programme SciLab suivant:

```
epsilon=input('Entrer la précision voulue: ');
N=floor(-log(epsilon))+1;
u=-1;
for i=1:N
    ..............................
end
disp(..............................)
```

Montrer que l'entier naturel N calculé dans ce programme vérifie: $\left(\frac{1}{e}\right)^N \leq$ `epsilon`.
Compléter les parties en pointillés de ce programme afin que le programme affiche une valeur approchée de α_2 à `epsilon` près.

(3) On revient au cas général où $n \geq 2$.
 (a) Montrer que $1 \leq g(\ln n) \leq n$. En déduire $g(\ln(2n)) \geq n$ (on donne $\ln 2 \simeq 0,69$).
 (b) En déduire que $\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$, puis établir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_n}{\ln(n)} = 1$.

Exercice 2. (Probabilités, matrices et `SciLab`)

Un fumeur cherche à réduire sa consommation de cigarettes. Au moment où il commencer l'expérience, il fume chaque jour avec une probabilité de $0,9$. Il décide d'adopter la stratégie suivante: pour savoir s'il va fumer le $n-$ième jour, il commence par regarder s'il a fumé le $(n-1)-$ième jour:

- Si oui, il lance un dé (équilibré, à 10 faces). Si le résultat est supérieur ou égal à 3, il fume;
- Si non, il ne fumera que s'il obtient (avec le même dé) un résultat strictement supérieur à 7.

Le fumeur cherche à savoir quelle sera sa probabilité de fumer à long terme chaque jour et à déterminer l'influence des probabilités de transition choisies.

On note p_n la probabilité de fumer le jour n et $q_n = 1 - p_n$ celle de ne pas fumer. En particulier, $p_0 = 0,9$ et $q_0 = 0,1$.

(1) Notant $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$, trouver une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
(2) Écrire alors une fonction `SciLab`, appelée `fumeur()`, prenant en argument n et renvoyant la probabilité p_n. Représenter le nuage de points $\{(n, p_n)\}_{1\leq 365}$. Interpréter le résultat.

Exercice 3.

(1) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \exp\left(\frac{1-2n}{2}\right)$? En cas de convergence, préciser sa somme S.
(2) On considère la suite v_n définie pour $n \geq 1$ par

$$v_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

 (a) À l'aide du développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$ en 0 rappelé ci-dessous, montrer que

$$v_n = \exp\left(-n + \frac{1}{2} + o(1)\right),$$

 où on rappelle

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

 (b) En déduire que $v_n/u_n \longrightarrow 1$, $n \to +\infty$ et que, par conséquent, $v_n \leq 2u_n$ à partir d'un certain rang.
 (c) Conclure quant à la nature de la série $\sum v_n$.