ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°11

À rendre le Mardi 7 Mars

Exercice 1. (D'après **ESC** 2006)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.

Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on considère l'équation

$$(E_n) \qquad g(x) = n.$$

(1) (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle est même de classe $\mathcal{C}^\infty$) et $g'(x) = e^x - 1$ donc on a le tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

En $+\infty$: $g(x) = e^x - x = e^x(1 - x/e^x) \to +\infty$ par croissance comparée.
En $-\infty$: $g(x) = e^x - x \to +\infty$.

(b) On applique le théorème de bijection. Comme g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, elle est bijective de $\mathbb{R}^-$ dans $[g(0), \lim_{-\infty} g[= [1, +\infty[$.
Comme $n \geq 2$ appartient à $[1, +\infty[$, l'équation a une unique solution sur $\mathbb{R}^-$ (et comme $g(0) = 1 \neq 2$, alors $\alpha_n \neq 0$).
De même sur $\mathbb{R}^+$, ce qui permet d'obtenir β_n. On a ainsi $g(\alpha_n) = n = g(\beta_n)$ et $\alpha_n < 0 < \beta_n$.

(2) On définit la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 & = & = -1 \\ u_{k+1} & = & e^{u_k} - 2 \end{cases}.$$

(a) On a $g(-1) = e^{-1} + 1 < 2$ car $-1 < 0$ d'où $e^{-1} < e^0 = 1$, et $g(-2) = e^{-2} + 2 > 2$. Donc $g(-1) < g(\alpha_0) < g(-2)$ et comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, les antécédents son rangés dans l'ordre inverse, c'est à dire

$$-2 \leq \alpha_2 \leq -1.$$

(b) Par définition, $2 = g(\alpha_2) = e^{\alpha_2} - \alpha_2$, ce qui donne immédiatement $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.
Pour $k = 0$ on a $u_0 = -1$ et donc $\alpha_2 \leq u_0 \leq -1$: l'initialisation est bien vérifiée. Supposons donc que, pour un certain entier $k \geq 0$, on a $\alpha_2 < u_k < -1$. Comme la fonction $x \mapsto e^x - 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$e^{\alpha_2} - 2 \leq e^{u_k} - 2 \leq e^{-1} - 2$$

et donc $\alpha_2 \leq u_{k+1} \leq e^{-1} - 2 \leq -1$ car $e^{-1} \leq 1$, et la récurrence est ainsi démontrée.

(c) Un bref coup d'oeil à l'inégalité cherchée nous incite à appliquer l'inégalité des accroissements finis (IAF) à la fonction $f(x) = e^x$. Sur l'intervalle $]-\infty, -1]$, on a $\exp'(x) = e^x \leq e^{-1} = 1/e$ donc

$$0 \leq \exp'(x) \leq \frac{1}{e}.$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, si $b \geq a$ sont dans cet intervalle,

$$0 < e^b - e^a < \frac{1}{e}(b-a).$$

(d) Pour tout entier naturel k,

$$\begin{aligned} u_{k+1} - \alpha_2 &= e^{u_k} - 2 - \alpha_2 \\ &= e^{u_k} - 2 - (e^{\alpha_2} - 2) \qquad \text{(d'après } (2b)) \\ &= e^{u_k} - e^{\alpha_2}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. La récurrence suit aisément:
pour $k = 0, u_0 - \alpha_2 = -1 - \alpha_2$ et comme $-1 \leq \alpha_2 \leq -2$ alors $0 \leq u_0 - \alpha_2 \leq 1 = \left(\frac{1}{e}\right)^0$.
Soit maintenant $k \geq 0$ tel que $0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)$. Comme u_k et α_2 vérifient $\alpha_2 \leq u_k \leq -1$, on peut appliquer l'inégalité obtenue au $(2c)$ (avec $a = \alpha_2$ et $b = u_{k+1}$):

$$\begin{aligned} u_{k+1} - \alpha_2 &= e^{u_k} - e^{\alpha_2} \\ &\leq \frac{1}{e}(u_k - \alpha_2) \qquad \text{(par } (2c)) \\ &\leq \frac{1}{e} \times \left(\frac{1}{e}\right)^k \qquad \text{(par HR)} \\ &\leq \left(\frac{1}{e}\right)^{k+1}, \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

(e) Comme $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$, alors $\left(\frac{1}{e}\right)^k \to 0$ et par le théorème des gendarmes, $u_k - \alpha_2 \to 0$ ou encore

$$\lim_{k \to +\infty} u_k = \alpha_2.$$

(f) Comme la partie entière vérifie $[x] \leq x < [x] + 1$ alors $-\ln(\varepsilon) < N$ et $-N < \ln(\varepsilon)$ d'où $\exp(-N) < \exp(\ln(\varepsilon))$ et N vérifie

$$\left(\frac{1}{e}\right)^N \leq \text{epsilon}.$$

Comme $0 \leq u_N - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^N$, l'écart entre u_N et α_2 est inférieur à ε. Donc le calcul de u_N donne une valeur approchée de α_2 à epsilon près donc le programme complété est le suivant.

```
epsilon=input('Entrer la précision voulue: ');
N=floor(-log(epsilon))+1;
u=-1;
for i=1:N
    u=exp(u)-2;
end
disp(u)
```

(3) (a) D'après les variations de g, $g(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$g(\ln n) = e^{\ln(n)} - \ln(n) = n - \ln(n) \leq n$ car $n \geq 1$ donc $\ln(n) \geq \ln(1) = 0$ et on a bien

$$1 \leq g(\ln n) \leq n.$$

On a alors $g(\ln(2n)) - n = e^{\ln(2n)} - \ln(2n) = 2n - \ln(n) - \ln(2) - n = (g(\ln n)) - \ln(2)$. Et comme $2 \leq e$ alors $\ln(2) \leq 1$ et $g(\ln(n)) - \ln(2) \geq g(\ln(n)) - 1 \geq 0$. Ainsi,

$$g(\ln(2n)) \geq n.$$

(b) On a vu que $g(\ln(n)) \leq n = g(\beta_n) \leq g(\ln(2n))$, et comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que tous les termes en sont éléments alors

$$\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n) = \ln(n) + \ln(2).$$

ce qui donne

$$1 \leq \frac{\beta_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)}.$$

Par le théorème des gendarmes, il suit que

$$\frac{\beta_n}{\ln(n)} \longrightarrow 1.$$

Exercice 2. (Probabilités, matrices et `SciLab`)

Un fumeur cherche à réduire sa consommation de cigarettes. Au moment où il commencer l'expérience, il fume chaque jour avec une probabilité de $0,9$. Il décide d'adopter la stratégie suivante: pour savoir s'il va fumer le $n-$ième jour, il commence par regarder s'il a fumé le $(n-1)-$ième jour:

- Si oui, il lance un dé (équilibré, à 10 faces). Si le résultat est supérieur ou égal à 3 (ce qui se passe avec probabilité $7/10 = 0,7$), il fume;
- Si non, il ne fumera que s'il obtient (avec le même dé) un résultat strictement supérieur à 7 (ce qui se passe avec probabilité $2/10 = 0,2$).

On note p_n la probabilité de fumer le jour n et $q_n = 1 - p_n$ celle de ne pas fumer. En particulier, $p_0 = 0,9$ et $q_0 = 0,1$. (On note P_n et Q_n les évènements correspondants.)

Une application de la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'évènement $\{P_n, Q_n\}$ donne

$$p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2q_n, \qquad q_{n+1} = 0,3p_n + 0,8q_n.$$

(1) La remarque précédente, issue de la FPT, donne immédiatement

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

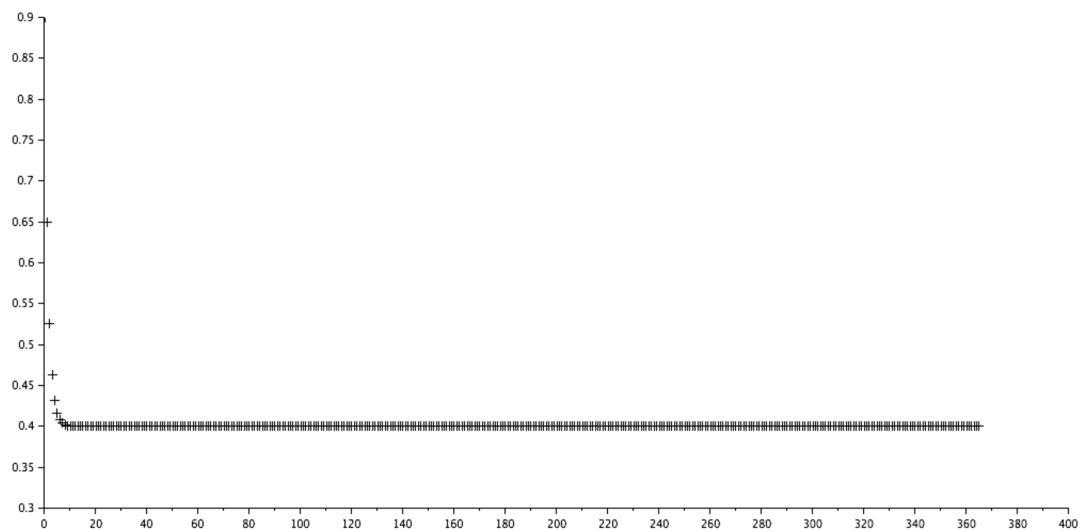
(2) Une récurrence immédiate permet de voir que

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc d'écrire un programme qui calcule la puissance de la matrice A. Easy.

```
function y=fumeur(n)
    X=[0.9;0.1]; //initialisation
    A=[0.7, 0.2; 0.3, 0.8]; //matrice de transition
    Y=(A^n*X); //puissance n
    y=Y(1); //premiere composante pour p_n
endfunction

x=0:365;
y=feval(x, fumeur);
plot2d(x,y,-1)
```



On observe une convergence assez rapide de p_n vers 0.4.

Exercice 3.

(1) On constate que $u_n = (\sqrt{e})e^{-n}$. Ainsi, u_n est multiple de la suite géométrique de raison $1/e$, terme général d'une série convergente. Donc u_n converge et, de plus,

$$S = \sqrt{e} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{\sqrt{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e\sqrt{e}}{e-1}.$$

(2) On considère la suite v_n définie pour $n \geq 1$ par

$$v_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

(a) On rappelle que, pour u proche de 0, on a $\ln(1+u) = u - u^2/2 + o(u^2)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
v_n &= \exp\left(n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = \exp\left(-n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(-n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(-n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(-n + \frac{1}{2} + o(1)\right),
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) Il découle du calcul précédent que

$$\frac{v_n}{u_n} = \exp(o(1)) \longrightarrow \exp(0) = 1,\ n \to +\infty.$$

En particulier, si la limite du quotient vaut 1, ce même quotient est plus petit que 2 à partir d'un certain rang, ce qui donne encore $v_n \leq 2u_n$.

(c) Tous les termes de la suite (v_n) sont positifs et $v_n \leq 2u_n$ avec u_n terme général d'une série convergente. Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum v_n$ converge.