ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°12

À rendre le Mercredi 22 Mars

Exercice 1.

On lance (indéfiniment) des fléchettes sur une cible. À chaque tir, la probabilité de toucher le centre de la cible vaut $p \in]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note A_n l'évènement "on touche consécutivement deux fois le centre de la cible pour la première fois avec le $n-$ième lancer". On note $a_n = P(A_n)$.

(1) Déterminer a_1, a_2 et a_3.

(2) À l'aide d'un système complet d'évènements représentant les premiers lancers, et une formule du cours que l'on nommera, montrer que

$$(\star) \qquad a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n.$$

(3) On note A l'évènement "on touche deux fois de suite le centre de la cible" et $S = P(A)$.

(a) Exprimer A à l'aide des A_n.

(b) Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2}$ en fonction de S, a_1 et a_2.

(c) En sommant l'égalité $(\star)$ entre 1 et $+\infty$, montrer que $S = 1$.

(d) Que peut-on en conclure?

Exercice 2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}, \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

(2) En déduire, à l'aide du développement limité donné ci-après, que

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

avec

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3), \qquad u \to 0.$$

(3) Déduire de la question précédente qu'il existe un certain $N \geq 1$, tel que, pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

(4) Conclure quant à la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$.

(5) Montrer qu'alors la suite (x_n) définie par $x_n = \ln(u_n)$ converge vers une limite ℓ puis en déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Ce^{-n}n^n\sqrt{n}}{n!} = 1.$$