Devoir Maison n°12

Solution

Exercice 1.

(1) En revenant à la définition des quantités à calculer, on trouve facilement

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \qquad \text{(impossible d'avoir deux touches après un seul tir)} \\ a_2 &= p^2 \\ a_3 &= (1-p)p^2 \qquad \text{(On rate au premier coup mais on réussit les deux autres)} \end{aligned}$$

(2) Notons T_i l'évènement "on touche la cible au $i-$ème tir". On constate que

$$\{\overline{T}_1, T_1 \cap \overline{T}_2, T_1 \cap T_2\}$$

forme un système complet d'évènement. Par la *formule des probabilités totales*, on a donc

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= P(A_{n+2}) \\ &= P_{\overline{T}_1}(A_{n+2})P(\overline{T}_1) + P_{T_1\cap\overline{T}_2}(A_{n+2})P(T_1\cap\overline{T}_2) + P_{T_1\cap T_2}(A_{n+2})P(T_1\cap T_2) \end{aligned}$$

Or, chaque tir manqué "remet les compteurs à zéro", donc

$$\begin{aligned} P_{T_1\cap T_2}(A_{n+2}) &= 0 \\ P_{T_1\cap\overline{T}_2}(A_{n+2}) &= P(A_n) = a_n \\ P_{\overline{T}_1}(A_{n+2}) &= P(A_{n+1}) = a_{n+1} \end{aligned}$$

et on obtient bien la relation de récurrence

$$(\star) \qquad a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n.$$

(3) (a) On voit que

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

et, les (A_n) étant clairement deux à deux incompatibles,

$$S = P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

(b) Il suffit de réindexer la somme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2} &= \sum_{n=3}^{+\infty} a_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - a_1 - a_2 \\
&= S - a_1 - a_2 \\
&= S - a_2 \qquad\qquad (\text{car } a_1 = 0).
\end{aligned}$$

(c) On somme chaque membre de l'égalité ($\star$) entre 1 et $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2} &= \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)a_{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)a_n \\
&\Updownarrow \\
S - a_2 &= (1-p)S + p(1-p)S \\
&\Updownarrow \\
S - p^2 &= (1-p+p(1-p))S \\
&\Updownarrow \\
S(1-1+p^2) &= p^2 \\
&\Updownarrow \\
S &= \frac{p^2}{p^2} = 1.
\end{aligned}$$

(d) On peut conclure que, presque sûrement, on touchera la cible deux fois consécutives.

Exercice 2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}, \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

(1) On fait le calcul

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}} \times \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \\
&= \frac{(n+1)}{e(n+1)} \times \left(\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}\right)^n \\
&= \frac{1}{e} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(2) On en déduit alors que

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1 \\ &= \frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

(3) En divisant la formule précédente par $1/n^2$, on obtient

$$\frac{v_n}{1/n^2} = \frac{1}{12}+o(1),$$

et ainsi le rapport entre les deux termes tend vers $1/12$. En particulier, au bout d'un moment (que l'on appelle N), ce rapport est positif et plus petit que 1 (sinon on ne peut pas se rapprocher de $1/12$), ce qui donne bien l'encadrement cherché.

(4) Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum(1/n^2)$ étant convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), la série de terme générale v_n est convergente.

(5) On constate que la $n-$ième somme partielle de la série précédente fait intervenir x_n. En effet, on est face à une somme télescopique:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} v_k &= \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(u_{k+1})-\ln(u_k)) \\ &= \ln(u_n)-\ln(u_1) \end{aligned}$$

ou encore, la suite (x_n) admet une limite ℓ en posant

$$x_n = \ln(u_1)\sum_{k=1}^{n-1} v_k \longrightarrow \frac{1}{e}+\sum_{k=1}^{\infty} v_k =: \ell.$$

En passant à l'exponentielle et en posant $C = 1/\exp(\ell) > 0$, on a immédiatement

$$u_n = \exp(x_n) \longrightarrow \frac{1}{C} \Longleftrightarrow \frac{Ce^{-n}n^n\sqrt{n}}{n!} \longrightarrow 1.$$

Il est possible, mais pas pour nous, de montrer que $C = \sqrt{2\pi}$. On aurait alors montré, dans cette exercice, la formule de Stirling, donnant un équivalent très utile d'une expression compliquée:

$$n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$